Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

На правах рукописи

Пшеницына Наталья Андреевна

Численно-асимптотическое исследование задач нелинейной акустики

Специальность 01.01.07 – вычислительная математика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2007

Работа выполнена на кафедре вычислительной математики механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	кандидат физико-математических наук, доцент *Лапшин Евгений Александрович*
Официальные опоненты:	доктор физико-математических наук, доцент, *Чечкин Григорий Александрович*
	доктор физико-математических наук, профессор, *Карамзин Юрий Николаевич*
Ведущая организация:	Московский Энергетический Институт (Технический Университет)

Защита диссертации состоится « ___ » ___________ 2007 г.
в ___ часов на заседании диссертационного совета К 501.001.11
при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова
по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, д.1, стр. 4, Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ имени М.В. Ломоносова (НИВЦ МГУ), конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке НИВЦ МГУ.

Автореферат разослан « ___ » _____________ 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета — В. В. Суворов
канд. физ.-мат. наук

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Диссертация посвящена исследованию нескольких задач нелинейной акустики.

Вопросы введения определения статистического решения и его существования подробно рассмотрены для линейных дифференциальных уравнений.

Для нелинейных уравнений статистические решения изучены в гораздо меньшей степени. Большинство работ в этой области посвящено рассмотрению уравнений, содержащих нелинейность в правой части. Так, например, для нелинейного волнового уравнения статистические решения исследовались в работах Вишика М. И., Кошеча А. И., Соболева С. И., Арсеньева А. А. Успехи статистической нелинейной акустики связаны в основном с одномерными волнами, распространяющимися в среде без поглощения. Для нелинейных волн в средах с диссипацией получены менее общие результаты.

Одним из важнейших уравнений нелинейной акустики является уравнение Бюргерса.

Исследование статистических свойств решения уравнения Бюргерса проводилось во многих работах. Большинство из них связано с расчетом спектральных и энергетических характеристик случайного волнового процесса.

Однородное уравнение Бюргерса с начальным условием, являющимся случайным процессом, было рассмотрено в работах Васильевой О. А., Лапшина Е. А.

В диссертации рассматривается задача вынужденных колебаний в предположении, что генерируемый сигнал является случайным процессом. Задача описывается неоднородным уравнением Бюргерса, со стохастической правой частью. Эта задача не сводится к однородной задаче со стохастическим начальным условием, т. к. уравнение нелинейно.

Применяемые в других работах методы исследования статистических свойств решения уравнения Бюргерса основаны на предположении о стационарности и эргодичности решения уравнения Бюргерса. Поэтому актуальной задачей является обоснование выполнения этих свойств решения. Доказательства соответствующих результатов получены в диссертации.

А именно, в диссертации доказана стационарность решения уравнения Бюргерса для исходного стационарного нормального процесса. Показано, что при некоторых ограничениях на корреляционную функцию исходного процесса, случайный процесс решения является эргодическим в смысле корреляционной функции.

Поскольку задача нелинейна, результаты и методы, относящиеся к однородному уравнению, не могут быть непосредственно использованы при исследовании неоднородной задачи. Поэтому для доказательства свойств решения неоднородного уравнения со стохастической правой частью, рассматриваемого в диссертации, разработан новый подход. Построены особые дискретные приближения к решению задачи. В качестве таких приближений рассматриваются решения разностной задачи, соответствующей исходной. Доказывается сходимость дискретных решений к точному. Затем выводятся свойства приближенных решений, и с помощью предельного перехода обосновывается выполнение этих свойств для решения исходной задачи.

Другой актуальной задачей нелинейной акустики является исследование распространения сигнала в релаксационных средах. В средах с релаксацией (с памятью) поведение волны описывается нелинейным интегро-дифференциальным уравнением (типа Бюргерса) с интегральным слагаемым в правой части. Это интегро-дифференциальное уравнение выводится из уравнения состояния и уравнения движения для среды с релаксацией (О. В. Руденко, С. И. Солуян). В то время как в классическом уравнении Бюргерса присутствует квадратичная нелинейность, в рассматриваемой задаче нелинейная функция произвольна; к тому же, из-за эффекта релаксации появляется интегральная часть. Назовем это уравнение интегро-дифференциальным уравнением типа Бюргерса. В предельном случае оно переходит в уравнение Кортевега–де Вриза–Бюргерса.

Аналитическое решение этой задачи пока не найдено. Поэтому анализ процессов искажения формы волны будет носить преимущественно асимптотический и качественный характер.

В диссертации рассматривается случай слоистой среды. Если порядок изменения параметров мал по сравнению с толщиной макроскопического слоя, тогда функции, описывающие свойства среды, а следовательно и коэффициенты уравнения быстро осциллируют. Отношение микроскопических изменений к толщине макроскопического слоя является малым параметром. Это влечет некоторые трудности для численного решения задачи, из-за необходимости задавать очень мелкую сетку, чтобы правильно обрабатывать все микроскопические колебания среды. По этой причине актуальной задачей является нахождение осредненной задачи с неосциллирующими коэффициентами, такое, что его решение близко к решению исходной задачи.В диссертации получены соответствующие осредненные уравнения, доказаны теоремы существования и единственности решений исходной и осредненной задач, исследована сходимость приближенного решения к точному.

В другом предельном случае малым параметром является множитель интегральной части. Такая ситуация возможна, когда влияние релаксационных эффектов среды на функцию решения мало. При этом описание решения возможно в терминах асимптотических разложений по малому параметру. В диссертации строится соответствующее разложение и доказываются оценки близости его конечных сумм к точному решению. Таким образом, полученное асимптотическое разложение является не только формальным, но и асимптотическим рядом для решения, и может служить для описания решения задачи.

Важной задачей является построение аппроксимирующих разностных схем и численное исследование нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. В статье Е. А. Лапшина, Г. П. Панасенко (Gregory P. Panasenko, Evgueny A. Lapshin *Homogenization of High Frequency Nonlinear Acoustics Equations* // Applicable Analysis. Vol.74(3-4), pp.311-331) рассматриваются нелинейные акустические уравнения в среде с быстроосциллирующими характеристиками; построены асимптотические решения этих уравнений, сходящиеся к точным решениям. Для этих уравнений актуальной задачей является разработка соответствующих разностных схем, доказательство аппроксимации этими схемами исходных уравнений и численный анализ. Соответствующие доказательства и численный расчет, проведенные в диссертации, позволяют наглядно продемонстрировать сходимость. Также расчет с помощью программы дает возможность исследовать поведение решений за пределами области, для которой справедливы аналитические результаты.

Цель работы.

1. Построить статистическое решение неоднородного уравнения Бюргерса с правой частью, являющейся случайным процессом. Доказать стационарность решения уравнения Бюргерса для исходного стационарного нормального процесса. Показать, что при некоторых ограничениях на корреляционную функцию исходного процесса, случайный процесс решения является эргодическим в смысле корреляционной функции.

2. Построить осредненную задачу с постоянными коэффициентами для интегро-дифференциального уравнения (типа Бюргерса), доказать существование и единственность решения исходной и осредненной задач, и близость их решений.

Построить полное асимптотическое разложение задачи по малому параметру при интегральной части. Доказать существование разложения и его сходимость к точному решению при стремлении малого параметра к нулю.

3. Провести численный анализ нелинейного уравнения эйконала и соответствующего ему осредненного уравнения.

Научная новизна.

Для стохастического неоднородного уравнения Бюргерса впервые доказывается существование статистического решения, обосновывается выполнение таких свойств вероятностной меры решения, как однородность, стационарность и эргодичность. Впервые строится осреднение интегро-дифференциального уравнения типа Бюргерса, доказывается существование и единственность решений исходной и осредненной задач, строго обосновывается сходимость приближенного решения к точному.

Теоретическая и практическая значимость.

Полученные в диссертации результаты носят теоретический и практический характер. Доказанные свойства решений задач, рассмотренных в диссертации, и построенные к ним приближения могут быть использованы как для дальнейшего аналитического исследования дифференциальных уравнений нелинейной акустики, так и для их более быстрого и эффективного численного исследования.

На защиту выносятся следующие основные результаты:

1. Доказано существование статистического решения уравнения Бюргерса. При некоторых условиях на исходный случайный процесс доказано выполнение таких свойств решения, как однородность (независимость от сдвига) меры, стационарность, эргодичность. При доказательстве используется разностная схема, решения которой рассматриваются как дискретные случайные процессы, аппроксимирующие непрерывный случайный процесс решения.

2. Доказаны существование и единственность решения задачи распространения нелинейного акустического сигнала в среде с релаксацией. Найдена осредненная задача, доказаны существование и единственность ее решения. Доказана сходимость решения осредненной задачи к точному решению. Для обоснования результатов построены пространства ре-

шений, используется метод приближений Галеркина, выводятся оценки решений из уравнений энергетического баланса, доказывается априорная оценка непрерывной зависимости решения от невязки.

3. Построена разностная схема для нелинейного уравнения эйконала и соответствующего осредненного уравнения. Доказана аппроксимация исходных задач разностными схемами. Найдены необходимые условия для устойчивости схем и сходимости решений разностных схем к точным решениям задач.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались на 38 Ежегодном международном конгрессе по численному анализу CANUM, Франция, Ренн, май-июнь 2006; научно-исследовательском семинаре „Осреднение и кратные сетки“, октябрь 2006, Франция, Париж; конференции „Ломоносовские чтения“, механико-математический факультет МГУ, апрель 2007; Международной конференции молодых ученых „Ломоносов“, механико-математический факультет МГУ, апрель 2007; Международной конференции „Дифференциальные уравнения и смежные вопросы“им. И.Г.Петровского, механико-математический факультет МГУ, май 2007; научно-исследовательском семинаре кафедры вычислительной математики механико-математического факультета МГУ, июнь 2007.

Публикации автора.

Основные результаты диссертации опубликованы в 4 работах, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы.

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы, и изложена на 95 страницах. Список литературы содержит 23 наименования.

Краткое содержание работы

Во введении дан краткий обзор работ, связанных с исследованием задач нелинейной акустики. Поставлена цель работы и кратко изложено содержание диссертации.

В первой главе рассмотрена задача вынужденных колебаний для случайного генерируемого сигнала. В §1.1 дана постановка задачи.

Рассматривается уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial V}{\partial z} - V\frac{\partial V}{\partial \theta} - \varepsilon\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = g(\theta) \tag{1}$$

с начальным условием

$$V(z=0,\theta) = 0 \tag{2}$$

при (z,θ) из G, где G — полоса $\{0 \le z \le Z < \infty, -\infty < \theta < \infty\}$, $\varepsilon > 0$.

Функции $g(\theta)$ из некоторого пространства B_0 являются реализациями исходного случайного процесса. Тогда решение задачи будет являться реализацией статистического решения задачи. Исходный случайный процесс задается вероятностной мерой μ_0, определенной на пространстве реализаций исходного процесса B_0. Статистическое решение задачи Коши с исходной мерой μ_0 определяется как некоторая вероятностная мера μ, заданная на пространстве B функций $V(z,\theta)$.

В §1.2 приведены известные теоремы о существовании нестатистического решения уравнения.

В §1.3 даются определения пространств реализаций, доказываются их свойства, необходимые для построения вероятностной меры на пространстве решений.

Пространство реализаций B_0 (B) состоит из ограниченных измеримых на $\mathbb{R}^1$ функций $g(\theta)$ $(V(z,\theta))$, для которых на любом интервале Ω из $\mathbb{R}^1$ выполнено $\int\limits_\Omega |g(\theta)|^2 d\theta < \infty$ $(\sup\limits_{0\le z\le Z}\int\limits_\Omega |V(z,\theta)|^2 d\theta < \infty)$.

$$B_0 = \{g(\theta) : \forall\Omega \int\limits_\Omega |g(\theta)|^2 d\theta < \infty\},$$

$$B = \{V(z,\theta) : \forall\Omega \sup_{0\le z\le Z} \int\limits_{\Omega} |V(z,\theta)|^2 d\theta < \infty\}.$$

Пусть F — множество финитных функций, имеющих компактный носитель и принадлежащих пространству $L_2(\mathbb{R}^1)$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(\theta)|^2 d\theta < \infty$.

Наделим множества B_0 и B топологиями, определенными базами окрестностей нуля следующего вида:

$$N_0(\delta, \{f_i\}) = \{g(\theta) : |\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\theta) f_i(\theta)| < \delta\},$$

$$N(\delta, \{f_i\}) = \{V(z,\theta) : \sup_{0\le z\le Z} |\int\limits_{-\infty}^{+\infty} V(z,\theta) f_i(\theta) d\theta| < \delta\}. \tag{3}$$

Здесь $\{f_i\}$ — всевозможные подмножества конечного числа функций f_i из множества F.

В §1.4 вводится понятие статистического решения задачи.

Определение 1. Вероятностную меру Радона на пространстве B назовем статистическим решением задачи (1), (2) с исходной мерой μ_0, если выполнены следующие условия:

1) мера μ сосредоточена на решениях уравнения, т. е. для любой непрерывной и ограниченной на пространстве B функции $\varphi(V)$ имеет место

$$\int\limits_B \varphi(V) \left[\frac{\partial V}{\partial z} - V\frac{\partial V}{\partial \theta} - \varepsilon\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} - g\right] d\mu = 0;$$

2) мера μ удовлетворяет начальному условию в том смысле, что для любой непрерывной функции $f(z,\theta)$, обращающейся в нуль при достаточно больших по модулю θ, и любой непрерывной ограниченной на пространстве B функции $\varphi(V)$ имеет место

$$\int\limits_B \varphi(V) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [f(z,\theta)V(z,\theta)]\, d\theta\, d\mu \longrightarrow 0, \quad t \longrightarrow 0.$$

Далее в §1.4 строится мера на пространстве реализаций решения, и таким образом доказывается существование статистического решения. Выводится свойство однородности (независимости от сдвига) меры решения.

Теорема 1. *Если μ_0 — произвольная вероятностная мера Радона на пространстве B_0 реализаций правой части g, то существует статистическое решение задачи* (1), (2) *с исходной мерой μ_0. Если μ_0 — однородная мера на B_0, то существует однородное статистическое решения задачи* (1), (2) *с исходной мерой μ_0.*

В §1.5 строится аппроксимирующая разностная схема задачи. Доказывается сходимость ее решения к точному решению исходной задачи.

В §1.6 с помощью решений разностной схемы, рассматриваемых как дискретные приближения к непрерывному случайному процессу, доказываются стационарность и эргодичность решения.

Во второй главе рассматривается задача распространения волн в средах с релаксацией — интегро-дифференциальное уравнение (типа Бюргерса).

В §2.1 дана постановка задачи:

$$\rho(\frac{x}{\delta})\frac{\partial u}{\partial x} - \beta(\frac{x}{\delta})\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha(\frac{x}{\delta})\frac{\partial f(u)}{\partial y} =$$
$$\nu(\frac{x}{\delta})\varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\int_{-\infty}^{y}\frac{\partial u(x,y')}{\partial y'}\exp\left(\frac{y'-y}{\tau}\right)dy'. \quad (4)$$

в области $Q_X = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant X, -\infty < y < \infty\}$,

$$u(x=0,y) = \varphi(y) \quad (5)$$

$$u(x,y+1) = u(x,y). \quad (6)$$

Здесь ε, τ, δ - константы, $\varepsilon > 0$, $\tau > 0$, $\delta > 0$, δ полагается малым параметром, ρ, α, β, ν, f, φ - функции, $\rho,\alpha,\beta,\nu \in C^1(\mathbb{R})$, $\rho,\alpha,\beta,\nu > 0$, $f \in C^1(\mathbb{R})$, f удовлетворяет условию Липшица с константой

L: $|f(z_1)-f(z_2)| \leqslant L|z_1-z_2|$, $\varphi \in W_2^{1,per}$, где $W_1^{2,per}$ - пополнение множества $C^\infty_{1-per.}(\mathbb{R})$ 1-периодических бесконечно дифференцируемых функций по норме $\|\cdot\|_2^1$,

$$\|\varphi(y)\|_2^1 = \left(\int_0^1 \varphi^2 + (\frac{\partial\varphi}{\partial y})^2 dy\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Вводится вспомогательная норма

$$\|u(x,y)\|^2_{\mathfrak{X}} = \sup_{x\in[0,X]} \int_0^1 u^2(x,y),\ dy + \int_0^1\int_0^X u_y^2(x,y)dx\,dy.$$

Пространство $\mathfrak{X}$ определяется как пополнение по этой норме пространства $C^\infty_{1-per.(y)}(\mathbb{R}^2)$ бесконечно дифференцируемых 1-периодичных по y функций.

В §2.2 доказывается существование решения задачи с помощью метода приближений Галеркина.

Теорема 2. *Пусть f липшицева и существуют следующие экстремумы на $[0,X]$: $\sup_{[0,X]}\frac{\beta}{\rho}$, $\sup_{[0,X]}\frac{\alpha}{\rho}$, $\sup_{[0,X]}\frac{\nu}{\rho}$, $\inf_{[0,X]}\frac{\beta}{\rho}>0$. Тогда существует обобщенное решение задачи* (4), (5), (6).

В §2.3 доказывается вспомогательная оценка нормы разности решений через норму разности соответствующих правых частей уравнения.

В §2.4 из вспомогательной оценки выводится единственность решения задачи.

Теорема 3. *Пусть существуют следующие экстремумы на $[0,X]$: $\sup_{[0,X]}\frac{\alpha}{\rho}$, $\sup_{[0,X]}\frac{\nu}{\rho}$, $\sup_{[0,X]}\frac{1}{\rho}$, $\inf_{[0,X]}\frac{\beta}{\rho}>0$, f - липшицева. Тогда решение задачи* (4), (5), (6) *в пространстве $\mathfrak{X}$ единственно.*

В §2.5 проводится осреднение по параметру осцилляции δ. Строится осредненное уравнение, выводится существование его решения. Доказывается сходимость приближенного решения u_a к точному при стремлении параметра δ к нулю.

Теорема 4. *Справедлива следующая оценка для разности точного решения u задачи* (4), (5), (6) *и приближенного решения* u_a*:*

$$\|u_a(x,y) - u(x,y)\|_{\mathfrak{X}} \leqslant C_a \delta^{1-d},$$

где C_a, d *- константы,* $d < 1$.

В §2.6 строится полное асимптотическое разложение решения по малому параметру ε (коэффициенту при интегральной части). Доказывается существование каждого конечного приближения и сходимость к точному решению при стремлении параметра ε к нулю.

Теорема 5. *Справедлива следующая оценка для разности точного решения u задачи* (4), (5), (6) *и конечного приближения* $u^{(k)}$*:*

$$\|u^{(k)} - u\|_{\mathfrak{X}} \leqslant C\varepsilon^{k+1},$$

т.е. асимптотическое разложение $u^{(k)}$ *сходится к точному решению u по норме* $\|\cdot\|_{\mathfrak{X}}$ *при* $\varepsilon \to 0$*, и порядок сходимости равен* ε^{k+1}.

В третьей главе проводится численное исследование уравнения эйконала и соответствующего ему осредненного уравнения.

В §3.1 дана постановка задачи. Рассматривается уравнение

$$(\bigtriangledown \psi_\varepsilon)^2 = n^2(z, \frac{z}{\varepsilon})$$

в полосе $z \in (0, z_0)$, $x \in \mathbb{R}$ с начальным условием

$$\psi_\varepsilon|_{z=0} = \psi_0(x),$$

где $\bigtriangledown = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z})$.

Функция $n^2(z, \frac{z}{\varepsilon})$ (коэффициент преломления) определяет свойства некоторой слоистой среды, которая зависит от малого параметра неоднородности $\varepsilon \ll 1$. Это дифференциальное уравнение, из которого находится фаза волны (эйконал) $\psi_\varepsilon = \psi_\varepsilon(x, z)$ как функция координат.

Такая модель описывает распространение звуковых импульсов, генерируемых сверхзвуковыми самолетами, ударные волны в атмосфере и океане, непрерывное излучение звуковых источников. Исследуется случай, когда характерный масштаб ε неоднородности среды мал по сравнению с толщиной слоя, в котором рассматривается задача.

Вводится операция осреднения для произвольной 1-периодической по ξ функции $F(z, \xi, a)$:

$$\langle F \rangle (z, a) = \int_0^1 F(z, \xi, a)\, d\xi.$$

Тогда соответствующим исходной задаче осредненным уравнением является

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} = \langle \sqrt{n^2 - (\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x})^2} \rangle,$$

с начальным условием $\bar{\psi}\big|_{z=0} = \psi_0(x)$. Требуется найти численно решения исходной и осредненной задач для произвольных функций $n(z, \frac{z}{\varepsilon})$, $\psi_0(x)$, проиллюстрировать сходимость приближенного решения к точному, определить порядок сходимости.

В §3.2 строятся разностные схемы, соответствующие задачам эйконала и его осредненного уравнения. Доказывается аппроксимация исходных задач схемами. Найдены необходимые условия для устойчивости схем и сходимости решений разностных схем к точным решениям задач.

В §3.3 приводятся результаты численных расчетов, включая графики решений и погрешностей.

В заключении сформулированы основные результаты работы:

1. Доказано существование статистического решения уравнения Бюргерса. При некоторых условиях на исходный случайный процесс доказано выполнение таких свойств решения, как однородность (независимость от сдвига) меры, стационарность, эргодичность. При доказательстве используется разностная схема, решения которой рассматриваются как дискретные случайные процессы, аппроксимирующие непрерывный случайный процесс решения.

2. Доказаны существование и единственность решения задачи распространения нелинейного акустического сигнала в среде с релаксацией. Найдена осредненная задача, доказаны существование и единственность ее решения. Доказана сходимость решения осредненной задачи к точному решению. Для обоснования результатов построены пространства решений, используется метод приближений Галеркина, выводятся оценки решений из уравнений энергетического баланса, доказывается априорная оценка непрерывной зависимости решения от невязки.

3. Построена разностная схема для нелинейного уравнения эйконала и соответствующего осредненного уравнения. Доказана аппроксимация исходных задач разностными схемами. Найдены необходимые условия для устойчивости схем и сходимости решений разностных схем к точным решениям задач.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Natalia Pshenitsyna* **Existence, unicity and asymptotic analysis for solution of the Burgers equation with relaxation** // CANUM 2006, Imprimerie de l'Université de Rennes, 2006, p.200.

2. *Пшеницына Н. А.* **О свойствах решений задач распространения волн в нелинейных средах** // Материалы XIV Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых „Ломоносов“. Том II. — М.: СП „Мысль“, 2007, С. 93.

3. *Пшеницына Н. А.* **Осреднение интегро-дифференциального уравнения Бюргерса** // Международная конференция, посвященная памяти И. Г. Петровского (XXII совместное заседание ММО и семинара им. И. Г. Петровского): Тезисы докладов. — М.: Изд-во МГУ, 2007, С. 255.

4. *Лапшин Е. А., Пшеницына Н. А.* **Существование и свойства статистического решения неоднородного уравнения Бюргерса** // Вестник Московского университета. Сер.1. Математика. Механика. 2007. № 5. С. 68-69.