На правах рукописи

ПЕТРОВ ДМИТРИЙ АНДРЕЕВИЧ

СИНТЕЗ ХОРОШО-ЛОКАЛИЗОВАННЫХ КОНЕЧНОМЕРНЫХ БАЗИСОВ ВЕЙЛЯ-ГЕЙЗЕНБЕРГА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ВЫСОКОЭФФЕКТИВНЫХ АЛГОРИТМОВ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

05.13.18 - Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2010

Работа выполнена на кафедре математики физического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор
Боголюбов Александр Николаевич

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Ильинский Анатолий Серафимович,
МГУ, факультет ВМиК

заслуженный деятель науки РФ,
доктор физико-математических наук, профессор
Кравченко Виктор Филиппович,
ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН

Ведущая организация:

Институт прикладной математики
им. М.В. Келдыша РАН

Защита состоится **25 июня** 2010 г. в **15:00** на заседании диссертационного совета Д 501.002.09 при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119991, г. Москва, Ленинские горы, дом 1, стр. 4, НИВЦ МГУ, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке НИВЦ МГУ.

Автореферат разослан «___» мая 2010г.

Ученый секретарь
диссертационного совета В.В. Суворов

Общая характеристика работы

Актуальность темы диссертации

Значительный технологический прогресс, достигнутый в разработке новых алгоритмов передачи информации и их активном применении на практике, делает особенно актуальными исследования новых методов синтеза сигналов все более сложной структуры, обладающих оптимальными временно-частотными характеристиками.

Преобразование Фурье, завоевавшее широкое распространение в теории обработки сигналов в линейных инвариантных во времени системах, становится трудно применимым инструментом, когда необходимо исследовать кратковременные, переходные процессы. Для таких более сложных явлений возникает необходимость получать информацию о спектре, локализованную во времени. Синтез универсального базиса, являющегося аналогом базиса Фурье, который позволил бы упростить обработку большинства типов сигналов, представляет собой крайне сложную задачу. Одним из наиболее важных примеров таких базисов являются базисы Вейля-Гейзенберга, получаемые сдвигами по времени и частоте одной функции (окна) или семейства функций.

В настоящее время в системах связи 3G, 4G и цифрового телевидения используется пакетная передача данных, а наиболее распространенной технологией является мультиплексирование (уплотнение) с ортогональным частотным разделением (OFDM - Orthogonal Frequency Division Multiplexing). OFDM сигнал, передаваемый в канал, представляется собой последовательность информационных пакетов, сформированных в виде линейной комбинации функций классического базиса Вейля-Гейзенберга.

В связи с ростом количества абонентов современные системы беспроводной связи должны обеспечивать прием информации в сложной помеховой обстановке. При этом высокое качество работы цифровых систем связи должно обеспечиваться при высоких скоростях передачи информации и высоких скоростях движения абонентов. При построении таких систем часто возникает ситуация, когда реальный радиоканал (среда распространения) обладает частотно-временным рассеянием. В процессе распространения сигнала в такой середе возникает интерференция между соседними OFDM пакетами (межсимвольная интерференция, МСИ) и между поднесущими каналами в рамках каждого OFDM пакета (межканальная интерференция, МКИ), то есть разрушается структура сигнала и на приемной стороне возникают помехи вплоть до полного нарушения связи. Во многом это объясняется тем, что прямоугольная форма формирующего импульса, характерная для классических OFDM систем, не является оптимальной с точки зрения локализации в частотной области и, соответственно, устойчивости к МКИ. Таким образом, борьба с частотно-временным рассеянием и снижение МКИ представляют серьезную проблему в мобильных широкополосных сетях различного назначения, например, WiMAX, LTE, DVB-T/H и др.

Кроме высоких локализационных характеристик базиса, позволяющих значительно снизить подверженность МКИ, в реальных приложениях на передний план выходит проблема практической реализуемости методов синтеза таких базисов и обработки сигналов на основе существующей аппаратной платформы. Например, в задачах спектрально-временного анализа различных процессов требуется возможность быстрого и гибкого изменения разрешающей способности, которая достигается настройкой параметров базиса Вейля-Гейзенберга, т.е. изменением его формирующей функции. Кроме того, в современных системах цифрового телевидения количество базисных функций может достигать нескольких десятков тысяч, причем прием цифрового видео сигнала должен осуществляется компактным абонентским устройством. Соответственно, особую актуальность приобретают решаемые в работе задачи разработки вычислительно эффективных алгоритмов, как синтеза самого базиса, так и «быстрых» алгоритмов разложения и восстановления сигнала в этих базисах.

В настоящий момент системы цифрового телевидения и беспроводной связи поколений 3G, 4G получают широкое распространение в России и мире. Поэтому разработка научно обоснованных решений по развитию математических методов и алгоритмов обработки сигналов, позволяющих повысить эффективность систем беспроводной связи, является актуальной задачей, имеющей важное научное и практическое значение.

Цель работы

Основной целью данной диссертационной работы является исследование математических методов синтеза хорошо-локализованных ортогональных базисов Вейля-Гейзенберга с обоснованно выбранными параметрами и их применение для эффективной обработки сигналов. В работе были поставлены следующие задачи:

- Разработка математических методов синтеза конечномерных, дискретных обобщенных базисов Вейля-Гейзенберга с заданными параметрами, обладающих хорошей локализацией одновременно и в частотной и во временной области.
- Теоретическое обоснование выбора вида формирующей функции и оптимальных параметров базисов Вейля-Гейзенберга.
- Разработка вычислительно эффективного алгоритма синтеза таких базисов.
- Разработка практически реализуемых, эффективных алгоритмов обработки сигнала на основе таких базисов.

Научная новизна работы

В диссертационной работе впервые обоснован выбор вида симметрии формирующей функции и фазового параметра обобщенного базиса Вейля-Гейзенберга, обеспечивающие высокую степень его частотно-временной локализации. Исследована зависимость локализации базиса от выбора его параметров. Разработан вычислительно эффективный алгоритм синтеза базиса. Обоснованы преимущества технологии передачи информации с ортогональным частотно временным уплотнением на основе оптимальных обобщенных базисов Вейля-Гейзенберга (WH-OFTDM – Weyl-Heisenberg Orthogonal Frequency Time Division Multiplexing) над классической OFDM схемой. Для OFTDM сигналов доказаны условия (критерии ортогональности), являющиеся аналогами теоремы Найквиста, гарантирующими отсутствие МКИ и МСИ. Построены эффективные алгоритмы обработки сигналов на основе синтезированных базисов.

Практическая ценность

Полученные в работе результаты могут быть использованы при дальнейшем развитии новой технологии передачи информации с частотно-временным мультиплексированием (WH-OFTDM), с возможностью последующего применения в современных устройствах связи 4G (WiMAX, WiMAX2, LTE и т.д.) и системах цифрового телевидения (DVB-H/T).

Основными преимуществами информационной технологии WH-OFTDM, следующими из полученных в работе теоретических результатов и результатов моделирования, являются:

- В каналах с частотно-временным рассеянием за счет организации дополнительного внутрисимвольного временного уплотнения удается существенно повысить, как спектральную, так и энергетическую эффективность системы.
- Понижается уровень внеполосного излучения, и тем самым ослабляются требования к выходному фильтру передатчика и защитному интервалу на границах частотного диапазона.
- Повышается устойчивость системы к межканальной и межсимвольной интерференции, появляется возможность адаптировать ее к параметрам частотно-временного рассеяния среды.

Разработанные в диссертации эффективные алгоритмы позволяют применить на практике ортогональные базисы Вейля-Гейзенберга, обладающие высокой степенью локализации.

Синтезированные алгоритмы могут также применяться для эффективного спектрально-временного анализа различных процессов, наблюдаемых, в частности, на выходе устройств регистрации (датчиков биомедицинских приборов, сейсмодатчиков, радио и гидролокаторов) и для идентификации и классификации объектов (процессов) по частотно-временным признакам.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту

1. Разработан вычислительно эффективный алгоритм, позволяющий синтезировать ортогональные конечномерные обобщенные базисы Вейля-Гейзенберга с хорошей частотно-временной локализацией.
2. Теоретически обоснован выбор вида и типа симметрии формирующей функции WH-базиса.
3. Теоретически обоснован выбор фазового параметра WH-базиса.
4. Разработаны вычислительно эффективные алгоритмы обработки сигналов на основе обобщенных WH-базисов.
5. Доказаны условия ортогональности WH-базисов и критерии отсутствия межканальной и межсимвольной интерференции.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности

В соответствием с областью исследования специальности 05.13.18 - «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки)» область диссертационного исследования включает разработку новых математических методов моделирования свойств хорошо-локализованных сигнальных базисов, разработку, обоснование и реализацию эффективных численных методов синтеза базисов и обработки сигналов.

Апробация работы

Содержание различных разделов диссертации докладывалось на международных и всероссийских форумах, конгрессах и конференциях. В частности, на международных форумах информатизации (МФИ), международных конгрессах (CTN) (Москва 2008, 2009); на Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2009» (Москва, 2009), где доклад был признан имеющим наибольший инновационный потенциал; на международной конференции «Современные достижения бионаноскопии» (Москва, 2009); на 4-ой отраслевой научной конференции-форуме «Технологии информационного общества» (Москва, 2010); на всероссийском научно-техническом семинаре «Системы синхронизации формирования и обработки сигналов для связи и вещания» (Воронеж, 2009); на международной конференции International Conference on Ultra Modern Telecommunications (Санкт-Петербург, 2009); на Первой Международной научно-технической конференции «Компьютерные науки и технологии» (Белгород, 2009); на 5-ом и 6-ом семинарах программы Финляндско-Российийского межуниверситетского сотрудничества в области телекоммуникаций (FRUCT) (Санкт-Петербург, 2008; Хельсинки, Финляндия, 2009); на научных семинарах НИВЦ МГУ (Москва, 2009, 2010); на научных семинарах кафедры математики физического факультета МГУ (Москва, 2008, 2009).

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 6 статьях, 5 из которых входят в список изданий, рекомендованных ВАК, а также в 9 тезисах докладов на международных и всероссийских конференциях и семинарах, список которых приведен в конце автореферата.

Объем и структура диссертации

Диссертация состоит из введения, 4 глав и заключения. Общий объем диссертации 144 страниц. Диссертация содержит 1 таблицу, 27 рисунков и список литературы из 139 названий.

Содержание диссертации

Во **ВВЕДЕНИИ** обоснована актуальность исследуемой проблемы, сформулированы цель диссертации и основные положения, выносимые на защиту. Описана структура диссертации, указаны научная новизна и практическая ценность полученных результатов.

В **ГЛАВЕ 1** проводится анализ предметной области исследования. Рассмотрены известные подходы и проблемы частотно-временного описания функций и сигналов.

Оконное преобразование Фурье и вейвлет преобразование являются мощными инструментам, дающими сходное частотно-временное описание сигналов и получившими широкое практическое распространение.

Базис, лежащий в основе дискретного оконного преобразования Фурье называется классическим базисом Вейля-Гейзенберга, т.к. формируется при помощи группы преобразований Вейля-Гейзенберга, т.е. дискретных сдвигов функции $g(t)$ по времени и частоте:

$$\mathcal{B}_{class}[\mathbb{R}] \triangleq \left\{\psi_{k,l}(t) = g(t-lT)\exp(2\pi j k Ft)\right\}. \tag{1}$$

В главе приводятся причины актуальности исследования именно базисов Вейля-Гейзенберга. В настоящее время этот базис широко используется в популярной технологии передачи информации с ортогональным частотным разделением (OFDM - Orthogonal Frequency Division Multiplexing). В связи с этим рассматриваются основные положения этой технологии, в классическом варианте которой в качестве формирующей базис функции $g(t)$ использует прямоугольный импульс. Базис (1) является ортогональным, а плотность его упаковки на частотно-временной плоскости равна $\mu = 1/TF = 1$.

Основной проблемой OFDM технологии, следующей из низкой локализации базисных функций (1) в частотной области, является высокая чувствительность к межканальной интерференции (МКИ). Следовательно, для достижения высокого уровня устойчивости сигнала к сложным условиям в реальных беспроводных каналах особенно важной становится решаемая в диссертации задача построения формирующей функции, обладающей хорошей частотно-временной локализацией.

Хорошо известно, что одновременная локализация энергии в частотной и временной области ограничивается принципом неопределенности Гейзенберга, а идеально локализованной является функция Гаусса. Однако базис Вейля-Гейзенберга, построенный на ее основе (базис Габора) не является ортогональным. Кроме этого, возможность построения хорошо-локализованных классических базисов Вейля-Гейзенберга ограничивается действием теоремы Бальян-Лоу. Из этой теоремы непосредственно следует, что невозможно синтезировать классический базис Вейля-Гейзенберга с дифференцируемой оконной функцией $g(t)$, обладающей компактным носителем, сохранив при этом высокую плотность частотно-временной сетки, т.е сохранив спектральную эффективность.

Ограничение, вносимое теоремой Бальян-Лоу, преодолевается благодаря введению обобщенного базиса Вейля-Гейзенберга (WH-базиса).

В работе показано, что полагая M (количество сдвигов в частотной области) четным, на конечном временном интервале $[0, NT]$ обобщенный конечномерный базис Вейля-Гейзенберга и сформированный на его основе дискретный сигнал $s[n]$ принимают вид:

$$s[n] = \sum_{k=0}^{M-1}\left(\sum_{l=0}^{L-1} c_{k,l}^{R}\ \psi_{k,l}^{R}[n] - \sum_{l=0}^{L-1} c_{k,l}^{I}\ \psi_{k,l}^{I}[n]\right),\ n \in J_N \tag{2}$$

$$\psi_{k,l}^{R}[n] = g\left[(n - lM)_{\operatorname{mod} N}\right]\exp\left(j\frac{2\pi}{M}k\left(n - \alpha/2\right)\right), \tag{3}$$

$$\psi_{k,l}^{I}[n] = -jg\left[(n + M/2 - lM)_{\operatorname{mod} N}\right]\exp\left(j\frac{2\pi}{M}k\left(n - \alpha/2\right)\right), \tag{4}$$

$$\mathcal{B}[J_N] \triangleq \left\{\psi_{k,l}^{R}[n], \psi_{k,l}^{I}[n]\right\}, \tag{5}$$

где $J_N \triangleq \{0, ..., N-1\}$, $N = ML \geq M$ (L - любое натуральное число). Система базисных функций $\mathcal{B}[J_N]$ является ортогональной в смысле вещественного скалярного произведения $\langle f, g\rangle_R \triangleq \operatorname{Re}\sum_{n=0}^{N-1} f[n] g^*[n]$.

В завершении главы рассмотрен метод формирования и обработки сигналов с использованием WH-базисов, называемый WH-OFTDM технологией (Orthogonal Frequency-Time Division Multiplexing – мультиплексирование с ортогональным частотно-временным разделением).

По результатам анализа предметной области исследований определен круг решаемых в работе задач, определяющих актуальность поставленной проблемы: разработка методов синтез хорошо-локализованных базисов и алгоритмов обработка сигналов на их основе.

В **ГЛАВЕ 2** решается задача синтеза хорошо-локализованного обобщенного базиса Вейля-Гейзенберга (5), а также проблемы выбора симметрии формирующей функции $g[n]$ и оптимального значения ее фазового параметра α.

Из анализа, проведенного в Главе 1, следует, что наилучшей частотно-временной локализацией обладает функция Гаусса. Однако, эта функция непрерывная и определена на всей действительной оси, поэтому, в первую очередь, решается задача поиска функции из пространства $l_2^R(J_N)$ (дискретных N-периодических функций с действительным скалярным произведением), аппроксимирующей Гауссиан.

В главе решена общая *Задача 1*

$$\tilde{g}_0^{(N)}[n]: \sum_{n=-N}^{N-1} \left| g[n] - \tilde{q}^{(N)}[n] \right|^2 \to \min_{\tilde{q}^{(N)}[n] \in l_R^2(J_N)},$$

приближения произвольной дискретной комплексной функции $g[n]$, обладающей определенным свойством симметрии, функцией $\tilde{g}_0^{(N)}[n]$ из пространства $l_R^2(J_N)$, где симметрию можно определить двумя способами:

Определение 1. Функция является сопряженной *N-1 симметричной*, если

$$g[N-1-n] = g[n],\ n \in J_N.$$

Определение 2. Функция является сопряженной *N-симметричной*, если

$$g[n] = g^*\left[(-n)_N\right], n \in J_N.$$

С использованием принципа неопределенных множителей Лагранжа, найден явный вид аппроксимирующих функций и доказано, что в случае симметрии исходной функции $g[n]$, для аппроксимирующей функции свойство симметрии также сохраняется.

На рис. 1 представлены графики исходной дискретной функции Гаусса и полученной аппроксимаций для случая N=10.

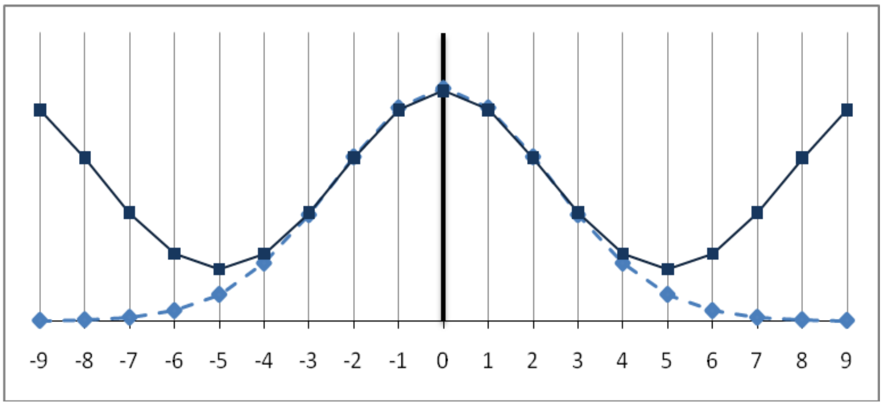

Рис. 1. N - *периодическая аппроксимация функции Гаусса*

Базис Вейля-Гейзенберга, построенный на основе наилучшей N-периодической аппроксимации базиса Габора, хотя и обладает наилучшей частотно-временной локализацией, но не является ортогональным. Поэтому в диссертации разрабатывается процедура ортогонализации этого базиса, которая сохраняет исходную структуру группы сдвигов (по времени и частоте) и наилучшую локализацию в классе ортогональных базисов такого вида.

Для этого конечномерный обобщенный базис Вейля-Гейзенберга представляется в виде блочной прямоугольной матрицы $\mathbf{U} = [\mathbf{U_R}, \mathbf{U_I}]$ размерности $(N \times 2N)$, у которой блоки $\mathbf{U_R}, \mathbf{U_I}$ - квадратные $(N \times N)$ матрицы, составленные для всех $k = 0,...,M$ и $l = 0,...L-1$ из столбцов базисных функций $\psi_{k,l}^{R}$ и $\psi_{k,l}^{I}$, соответственно.

В диссертации доказано, что среднеквадратическая норма разности (норма Фробениуса $\|\mathbf{A}\|_E^2 = tr(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)$) между матрицами любых двух базисов Вейля-Гейзенберга (не обязательно ортогональных) сводится к норме разности формирующих функций:

$$\|\mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_2\|_E^2 = 2N \|g_1[n] - g_2[n]\|^2 = 2N \sum_{n=0}^{N-1} (g_1[n] - g_2[n])^2 . \tag{6}$$

Однако, для получения оптимального ортогонального базиса Вейля-Гейзенберга не достаточно минимизировать норму разности (6) между матрицами базиса Габора $\mathbf{G}$ и искомой матрицей $\mathbf{U}$. Основную задачу на экстремум необходимо решать на специальном множестве комплексных ортогональных матриц:

Задача 2. На подмножестве $\mathfrak{A} = \{\mathbf{U} \in M_{N,2N}(\mathbb{C}) : \mathrm{Re}(\mathbf{U}^*\mathbf{U}) = \mathbf{I_{2N}}\}$ комплексных прямоугольных матриц размера $(N \times 2N)$, для которых справедливо выражение $\mathrm{Re}(\mathbf{U}^*\mathbf{U}) = \mathbf{I_{2N}}$ найти оптимальную матрицу $\mathbf{U_{опт}}$, которая доставляет минимум в задаче на экстремум

$$\mathbf{U}_{\mathbf{опт}}:\ \min_{\mathbf{U}\in\mathfrak{A}}\left\|\mathbf{G}-\mathbf{U}\right\|_E^2 \triangleq F, \tag{7}$$

где $\mathbf{G}\in M_{N,2N}(\mathbb{C})$ - матрица базиса Габора.

В главе кратко рассматривается алгебраический подход к синтезу матрицы хорошо локализованного ортогонального базиса Вейля-Гейзенберга, предложенный В.П. Волчковым, в основе которого лежит сингулярное разложения.

В диссертации доказывается, что рассмотренный алгоритм сохраняет структуру сдвигов матрицы базиса Вейля-Гейзенберга. При этом оптимальная формирующая функция задается первым столбцом матрицы $\mathbf{U}_{\mathbf{опт}}$:

$$g[n]=\mathbf{U}_{\mathbf{опт}}(n,1). \tag{8}$$

Локализацию базиса Вейля-Гейзенберга можно дополнительно улучшить за счет оптимального выбора значения фазового параметра α (см. (3), (4)). Значение минимума задачи (7) зависит от α и имеет вид:

$$F(\alpha)=\min_{\mathbf{U}\in\mathfrak{A}}\left\|\mathbf{G}(\alpha)-\mathbf{U}\right\|_E^2=\left\|\mathbf{G}_{\mathbf{B}}(\alpha)-\mathbf{V}_{\mathbf{опт}}\right\|_E^2=\sum_{i=1}^{2N}(\sigma_i(\alpha)-1)^2. \tag{9}$$

Для этого решается дополнительная экстремальная *Задача 3*:

$$a_{опт}:\ \min_{\alpha}\left(\left\|\mathbf{G}_{\mathbf{B}}(\alpha)-\mathbf{V}_{\mathbf{опт}}\right\|_E^2\right). \tag{10}$$

Теоретическое решение этой задачи в общем случае крайне затруднительно, поэтому вводится новая мажорирующая норма $\left\|\mathbf{G}_{\mathbf{B}}(\alpha)\mathbf{G}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{T}}(\alpha)-\mathbf{I}\right\|_E^2\geq\left\|\mathbf{G}_{\mathbf{B}}(\alpha)-\mathbf{V}_{\mathbf{опт}}\right\|_E^2$. Этот факт позволяет перейти от решения задачи (10) к задаче

$$a_{opt}:\ \min\left(\left\|\mathbf{G}_{\mathbf{B}}\mathbf{G}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{T}}-\mathbf{I}\right\|_E^2\right). \tag{11}$$

В практическом плане наиболее важными являются случаи, когда формирующая функция $g[n]$ WH-базиса является N- или сопряженной $(N-1)$-симметричной. Для этих случаев получено точное решение задачи (11):

Теорема 1. Пусть дискретная формирующая функция $g[n]$, $n\in J_N$, WH-базиса (5), удовлетворяет свойству сопряженной $(N-1)$-симметрии. Тогда наилучшая локализация базиса $\mathcal{B}[J_N]$ по критерию:

$$\left\|\mathbf{G}(\alpha)-\mathbf{U}\right\|_E^2\to\min_{\alpha\in\mathbb{R}}\left(\min_{U\in\mathfrak{A}}\right) \tag{12}$$

достигается при значениях $\alpha_{опт}=M/2-1+qM/2$, $q\in\mathbb{Z}$.

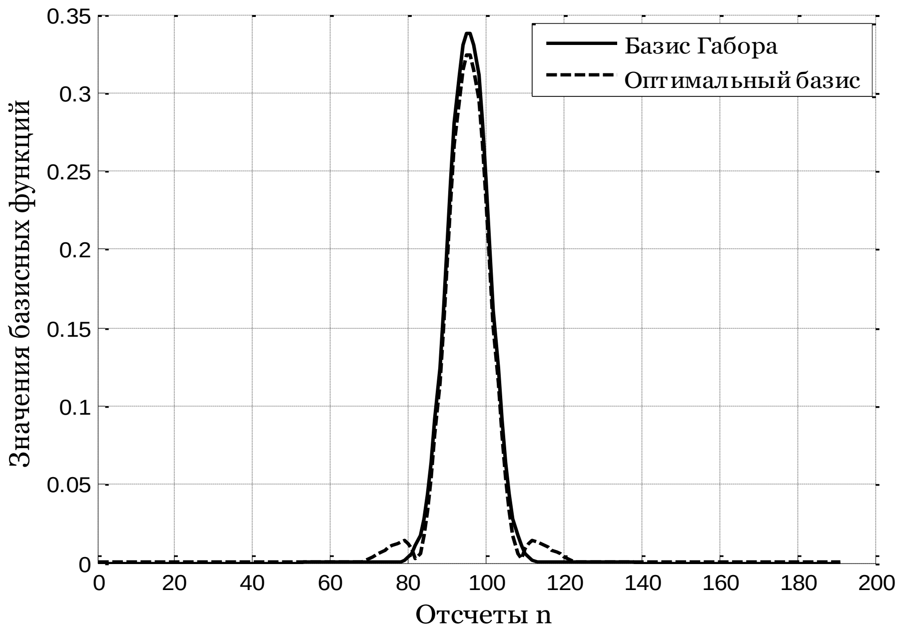

Рис. 2. *Оптимальный базис Вейля-Гейзенберга*

В результате выполненного в завершении главы компьютерного моделирования удается установить ряд важных свойств синтезированного WH-базиса:

- Полученная формирующая функция является хорошо локализованной и близка к функции Гаусса (рис.2).
- При отклонении фазового параметра от оптимального значения локализация ухудшается и теряется свойство симметрии.
- Найденные оптимальные значение фазового параметра приводят к минимизации не только мажорирующей нормы (11), но и исходной нормы (9).

Основным недостатком разработанного алгебраического метода синтеза базиса является то, что он требует большого числа вычислений, порядка $O\left(N^3\right)$. Это значительно затрудняет его использование на практике, когда размерность базиса может достигать нескольких десятков тысяч. Уменьшить объем вычислений можно, за счет того, что в результате работы алгоритма синтезируется не матрица WH-базиса, а сразу оптимальная формирующая функций.

В **ГЛАВЕ 3** с целью разработки вычислительно эффективного метода синтеза базиса Вейля-Гейзенберга доказаны критерии ортогональности, сформулированные в виде специальных условий на формирующую функцию.

Сначала условия ортогональности базиса представляются в более компактном виде:

Лемма 1. Необходимыми и достаточными условиями ортогональности базиса $\mathcal{B}[J_N]$ являются равенства:

$$\left\langle \psi_{k,l}^{R}[n], \psi_{0,0}^{R}[n] \right\rangle_R = \delta_{k,0}\delta_{l,0}, \tag{13}$$

$$\left\langle \psi_{k,l}^{R}[n], \psi_{0,0}^{I}[n] \right\rangle_R = 0,\ \forall k \in J_M,\ \forall l \in J_L. \tag{14}$$

Затем рассматривается случай, когда $g[n]$ обладает каким-либо из двух рассмотренных выше свойств симметрии, для которых доказаны следующие необходимые и достаточные условия ортогональности:

Теорема 2. Если формирующая функция $g[n]$ обобщенного базиса Вейля-Гейзенберга является действительной и обладает свойством сопряженной N-симметрии, а фазовый параметр выбран оптимально ($\alpha = M/2$), то необходимым и достаточным условием его ортогональности является равенство:

$$\sum_{n=0}^{N-1} g[n] g\left[(n-lM)_N\right] \exp\left(\pm j \frac{2\pi mn}{M/2}\right) = \delta_{l,0}\delta_{m,0},\ \forall m \in J_{M/2},\ \forall l \in J_L. \tag{15}$$

Кроме того, вне зависимости от типа симметрии действительного формирующего импульса $g[n]$ доказаны дополнительные критерии ортогональности базиса $\mathcal{B}[J_N]$ в частотной и временной области:

Теорема 3. Необходимым и достаточным условием ортогональности базиса $\mathcal{B}[J_N]$ во временной области является равенство

$$\sum_{r=0}^{2L-1} g\left[\left(n - r\tfrac{M}{2}\right)_N\right] g\left[\left(n - r\tfrac{M}{2} - lM\right)_N\right] = \frac{2}{M}\delta_{l,0},\ \forall n \in J_N,\ \forall l \in J_L, \tag{16}$$

а в частотной области равенство

$$\sum_{k=0}^{M-1} G\left[(p+kL)_N\right] G^*\left[(p+kL-2Lm)_N\right] = \frac{1}{L}\delta_{m,0},\ \forall p \in J_N,\ \forall m \in J_{M/2}. \tag{17}$$

Теоремы 2 и 3 играют важную теоретическую роль, т.к. гарантируют отсутствие МКИ и МСИ на входе приемника при распространении сигнала по идеальному каналу, вносящему только белый шум. То есть Теорема 2 фактически является аналогом критерия Найквиста, а Теорема 3 – теоремы Найквиста, которые сформулированы в работе для более сложных OFTDM сигналов.

Последним шагом, необходимым для формулировки «быстрого» алгоритма формирования базиса является введение преобразования Винера дискретной функции $g[n]$, структура которого хорошо отвечает структуре WH-базиса:

$$\eta_k[n] = \sum_{r=0}^{2L-1} g\left[\left(n - r\tfrac{N}{2L}\right)_N\right] \exp\left(\frac{2\pi j}{2L} rk\right). \tag{18}$$

Используя критерий (16) и вид преобразования Винера (18), в работе показано, что необходимым и достаточным условием ортонормированности обобщенного базиса Вейля-Гейзенберга $\mathcal{B}\left[J_N\right]$ является равенство

$$\left|\eta_k^{M/2}\left[n\right]\right|^2 + \left|\eta_{k+L}^{M/2}\left[n\right]\right|^2 = 4/M. \tag{19}$$

Этот критерий используется для формирования эффективной процедуры ортогонализации, в основе которой лежит быстрое преобразование Фурье (БПФ). За счет этого удается значительно снизить объем вычислений и построить базисы большой размерности, где N достигает нескольких десятков тысяч.

В **ГЛАВЕ 4** решается наиболее актуальная проблема реального практического применения WH-базисов, а именно, построение вычислительно эффективного алгоритма обработки сигналов на их основе.

В общем случае, процедура построения сигнала $\mathbf{s} = \left[s\left[0\right],...,s\left[N-1\right]\right]^T$ (2) на основе WH-базиса (5) представляет собой произведение вектора действительных информационных символов $\mathbf{c} = \left[c_{0,0}^R,...,c_{M-1,L-1}^R,c_{0,0}^I,...,c_{M-1,L-1}^I\right]^T$ на блочную матрицу этого базиса $\mathbf{U}$:

$$\mathbf{s} = \mathbf{Uc}. \tag{20}$$

Однако объем вычислений, необходимый для проведения этих операций, составляет порядка $O\left(N^2\right)$, что затрудняет возможность практического использования WH-базисов в реальных устройствах, где используется тысячи поднесущих M.

Для получения более вычислительно эффективного алгоритма в главе вводится аналог z-преобразования для последовательной из пространства $l_2^R\left(J_N\right)$:

$$G\left(z\right) = \sum_{n=0}^{N-1} g\left[n\right] z^{-n},\ g\left[n\right] \in l_2^R\left(J_N\right). \tag{21}$$

В z-представлении проанализированы несколько схем, широко распространенных в параллельной цифровой обработке сигналов: прореживающий и интерполирующий фильтры, ДПФ банк фильтров. В главе показано, что эффективность этих систем можно значительно увеличить, если воспользоваться полифазным разложением. Для этого последовательность $g\left[n\right]$ (импульсная характеристика фильтра) раскладывается на M подпоследовательностей $g_p\left[n\right],\ p = 0,1,...,M-1$

$$g_p\left[n\right] = \begin{cases} g\left[\left(n+p\right)_N\right], n/M = 0,1,..L-1; \\ 0, n/M \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Причем исходную последовательность можно выразить следующим образом:

$$g[n]=\sum_{p=0}^{M-1} g_p\left[(n-k)_N\right].$$

где $p_p[n]\triangleq g\left[(nM+p)_N\right]=g_p\left[(nM)_N\right]$ являются полифазными компонентами, так как для z-образов справедливо:

$$G(z)=\sum_{p=0}^{M-1} z^{-p}P_p\left(z^M\right),\quad P_p(z)=\sum_{l=0}^{L-1} p_p[l]z^{-l}. \tag{22}$$

Для того, чтобы применить полифазное разложение к OFTDM сигналу (2) применяется замена переменных

$$a_{2k',2l+1}=c^R_{2k',l},\quad a_{2k',2l}=c^I_{2k',l},\quad a_{2k'+1,2l+1}=c^I_{2k'+1,l},\quad a_{2k'+1,2l}=c^R_{2k'+1,l};$$

$$\varphi_{2k',2l+1}=0,\quad \varphi_{2k',2l}=\frac{\pi}{2},\quad \varphi_{2k'+1,2l+1}=\frac{\pi}{2},\quad \varphi_{2k'+1,2l}=0,$$

позволяющая представить сигнал $s[n]$ следующим образом:

$$s[n]=\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l'=0}^{2L-1} a_{k,l'}\Phi_{k,l'}[n], \tag{23}$$

где семейство функций $\left\{\Phi_{k,l'}[n]\right\}\triangleq\left\{g\left[n-(l'-1)M'\right]\exp\left(j\frac{2\pi}{M}k\left(n-\frac{\alpha}{2}\right)\right)\exp\left(j\varphi_{k,l'}\right)\right\}$ является альтернативной формой записи базиса Вейля-Гейзенберга (5).

В главе использовано полифазное разложение (22) для получения z-представления сигнала (23):

$$S(z)=\sum_{k=0}^{M-1} X^0_k\left(z^{M/2}\right)\sum_{p=0}^{M-1} z^{-p}R_{k,p}\left(z^M\right)=\left(\mathbf{X}^{(\mathbf{0})}\right)^T\mathbf{RZ}, \tag{24}$$

где $\mathbf{X}^{(\mathbf{0})}=\left[X^0_0\left(z^{M/2}\right),\ldots,X^0_{M-1}\left(z^{M/2}\right)\right]^T$, $X^0_k\left(z^{M/2}\right)$ - z-представление последовательности $x^0_k[l']\triangleq a_{k,l'}\exp\left(j\frac{\pi}{2}(l'+1)\right)$; $\mathbf{Z}=\left[1,z^{-1},\ldots,z^{-M+1}\right]^T$. При этом показано, что для матрицы $\mathbf{R}$ существует эффективная факторизация:

$$\mathbf{R}(z)=\mathbf{W}_{diag}\mathbf{W}_M\mathbf{P}_{diag}(z),$$

где $\mathbf{W}_{diag}=diag\left[1,W_M^{\left(\frac{\alpha-M'}{2}\right)},\ldots,W_M^{(M-1)\left(\frac{\alpha-M'}{2}\right)}\right]$, $\left[\mathbf{W}\right]_{k,p}=W_M^{-kp}$- матрица ДПФ ($W_M=e^{-j2\pi/M}$), $\mathbf{P}_{diag}(z)=diag\left[P_0(z),\ldots,P_{M-1}(z)\right]$ состоит из полифазных компонент (22).

Таким образом, построенный алгоритм обработки OFTDM-сигналов основывается на двух основных элементах: ДПФ и полифазном разложении.

Причем использование разреженных матриц размерности, меньшей чем $(2N \times 2N)$, совместно с БПФ приводит к значительному сокращению вычислительных затрат, которые составляют порядка $O(N/2\log_2 M/2)+O(2N\log_2 2L)$ операций.

В завершении главы приведены схемы обработки OFTDM сигналов, основанные на разработанных алгоритмах.

Проведенное в главе исследование демонстрирует путь к эффективному применению на практике хорошо локализованных базисов Вейля-Гейзенберга, обладающие высокой степенью локализации.

В **ЗАКЛЮЧЕНИИ** сформулированы основные научные и практические результаты работы.

В результате работы были получены следующие выводы:

1. На основе исследования существующих методов частотно-временного анализа и подходов к цифровой обработке и передаче сигналов сделан вывод о том, что одним из наиболее актуальных и перспективных с практической точки зрения направлений является использование хорошо локализованных ортогональных обобщенных базисов Вейля-Гейзенберга.
2. Основной ценность полученных результатов является то, что разработанные методы и алгоритмы представляют собой полный математический «инструментарий», необходимый для эффективного использования обобщенных хорошо-локализованных WH-базисов, начиная от синтеза самого базиса и заканчивая его применением для обработки функций и сигналов.
3. Построено N-периодическое приближение комплексных дискретных симметричных функций. Это позволяет теоретически обосновать выбор вида и типа симметрии формирующей функции обобщенного базиса Вейля-Гейзенберга.
4. Показано, что качество локализации обобщенного WH-базиса можно дополнительно улучшить за счет оптимального выбора фазового параметра. Теоретически обоснованы значения фазового параметра для двух классов симметрии формирующей функции.
5. Доказаны необходимые и достаточные условия ортогональности обобщенных WH-базисов, которые также являются критериями отсутствия межканальной и межсимвольной интерференции. Проведена аналогия между этими условиями и классическими вариантами теоремы и критерия Найквиста.

6. Доказаны дополнительные критерии ортогональности в виде удобных для дальнейшего использования условий на базис Винера. Разработан вычислительно эффективный алгоритм синтеза ортогональных WH-базисов высокой степени частотно-временной локализации, основанный на преобразования Винера и дискретном преобразовании Фурье.
7. С использованием полифазного разложения разработаны вычислительно эффективные алгоритмы обработки дискретных функций на основе обобщенных базисов Вейля-Гейзенберга.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

Публикации в изданиях из Перечня ВАК:

1. *Петров Д.А.* Алгоритмы формирования ортогональных хорошо локализованных базисов // Математическое моделирование. 2010. Том 22, № 3. 314-320.
2. *Петров Д.А.* Критерии ортогональности хорошо локализованных базисов // Вычислительные методы и программирование. 2009. Том 10. Раздел 1. 314-320.
3. *Волчков В.П., Петров Д.А.* Условия ортогональности обобщенных базисов Вейля-Гейзенберга для OFTDM сигналов // Научные ведомости БелГУ, Сер. История. Политология. Экономика. Информатика. 2009. № 15(70). Вып. 12/1. 190-199.
4. *Мельник С.В., Петров Д.А.* Потенциальные возможности для широкополосных радиотехнологий // Вестник связи. 2009. № 10. 21-26.
5. *Волчков В.П., Петров Д.А.* Оптимизация ортогонального базиса Вейля-Гейзенберга для цифровых систем связи, использующих принцип OFDM/OQAM передачи // Научные ведомости БелГУ, Сер. История. Политология. Экономика. Информатика. 2009. № 1(56). Вып. 9/1. 104-115.

Публикации в других научных изданиях:

6. *Боголюбов А.Н., Петров Д.А.* Применение полифазного разложения для эффективной вычислительной реализации алгоритма формирования сигнала на основе конечномерного обобщенного базиса Вейля-Гейзенберга // Электронный журнал Радиоэлектроники РАН. Март 2010. Раздел «Математические методы в задачах радиоэлектроники».
7. *Петров Д.А.* Оптимизация обобщенного ортогонального базиса Вейля-Гейзенберга с учетом вида симметрии формирующего импульса // Сборник тезисов XVI Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2009», секция «Физика». М.: Физический факультет

МГУ, 2009. 9-10.

8. *Боголюбов А.Н., Петров Д.А.* Математические методы синтеза хорошо-локализованных базисов для борьбы с межканальной интерференцией // Тезисы 4-ой отраслевой научной конференции-форума «Технологии информационного общества». М.: Инсвязьиздат, 2010. 39.
9. *Volchkov V.P., Petrov D.A.* Orthogonal Well-Localized Weyl-Heisenberg Basis Construction and Optimization for Multicarrier Digital Communication Systems // International Conference on Ultra Modern Telecommunications (ICUMT 2009). St. Petersburg: Oct. 12-14, 2009. -ISBN: 978-1-4244-3941-6. -IEEE Catalog Number: CFP0963G-CDR (http://ieeexplore.ieee.org).
10. *Петров Д.А.* Оптимизация обобщенного ортогонального базиса Вейля-Гейзенберга с учетом вида симметрии формирующего импульса // Сборник тезисов третьей международной конференции «Современные достижения бионаноскопии». М.: Издательство Московского Университета, 2009. 73-74.
11. *Волчков В.П., Петров Д.А.* «Обобщенная теорема Найквиста для OFTDM сигналов» // Материалы Всероссийского научно-технического семинара «Системы синхронизации формирования и обработки сигналов для связи и вещания». Воронеж: Издательство ВГТУ, 2009. 28-32.
12. *Волчков В.П., Петров Д.А.*, Основные преимущества OFTDM технологии формирования и обработки широкополосных сигналов // Труды конференции Международный форум информатизации (МФИ-2009). Международный конгресс (CTN-2009). Телекоммуникационные и вычислительные системы. М.: Инсвязьиздат, 2009. 222-224.
13. *Волчков В.П., Петров Д.А.* Условия ортогональности базисов Вейля-Гейзенберга // Сборник трудов Первой Международной научно-технической конференции «Компьютерные науки и технологии». Белгород: ООО «ГиК», 2009. 10-13.
14. *Petrov D.A.* Efficient Algorithm of Well-Localized Bases Construction for OFTDM Systems // Proceedings of 6th seminar of Finnish-Russian University Cooperation in Telecommunications (FRUCT) Program. Helsinki, Finland: SUAI university publisher house, 2009. 106-112.
15. *Волчков В.П., Петров Д.А.* Синтез и оптимизация сигнальных базисов с наилучшей частотно-временной локализацией для OQAM/OFDM систем // Труды конференции Международный форум информатизации (МФИ-2008). Международный конгресс (CTN-2008). Телекоммуникационные и вычислительные системы. М.: Инсвязьиздат, 2008. 238-239.