На правах рукописи

Назимов Акбар Багадурович

ТЕОРИЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ СДВИГОМ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

01.01.07 – вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2013

Работа выполнена на кафедре высшей математики Вологодского государственного технического университета.

Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор,
Морозов Владимир Алексеевич

Официальные оппоненты: Васин Владимир Васильевич,
член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук, профессор,
ИММ УрО РАН, заведующий отделом

Демьянович Юрий Казимирович,
доктор физико-математических наук, профессор,
С-ПбГУ, заведующий кафедрой

Ягола Анатолий Григорьевич,
доктор физико-математических наук, профессор,
МГУ имени М.В. Ломоносова, профессор

Ведущая организация: Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН,
г. Новосибирск

Защита состоится 7 июня 2013 г. в 15 час. на заседании Диссертационного совета Д 501.002.09 при Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 4, МГУ, НИВЦ, Большой конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке МГУ имени М.В.Ломоносова (Ломоносовский просп., 27).

Автореферат разослан «_____» ________ 2013 года

Ученый секретарь
Диссертационного совета Суворов В. В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Методы решения некорректно поставленных задач и их устойчивая реализация составляют важное направление в современной вычислительной математике. Развитие общей теории некорректных задач началось более полувека тому назад. Этому способствовали потребности различных областей естествознания, техники и медицины. Это развитие исходит из основополагающих работ выдающихся русских советских математиков А. Н. Тихонова, М. М. Лаврентьева, В. К. Иванова, а также созданной ими математической школы. Оно определило пути развития теории и методов решения некорректных задач – одного из самых плодотворных направлений современной вычислительной математики. К настоящему времени создана достаточно общая теория некорректно поставленных задач, разработаны приближенные методы их решения, с помощью которых успешно решены и решаются многие важные прикладные задачи. Важное значение имеет приложение этих теоретических результатов при решении конкретных задач, таких как интегральные и дифференциальные уравнения, возникающие в теории упругости, аэродинамике, теории трещин, а также в других разделах современной математики. Актуальность тематики подтверждается также активным участием многочисленных ведущих математиков и исследователей других научных областей (астрофизики, механики, геофизики, аэродинамики, теории упругости и др.). Остановимся на некоторых рассматриваемых в работе вопросах более подробно.

1. Самым простым по постановке и одним из важных классов некорректно поставленных задач является проблема решения систем линейных алгебраических уравнений с вырожденной или плохо обусловленной матрицей коэффициентов. Характерными особенностями указанной проблемы является возможная неединственности решения и его неустойчивость. Разработка теории и методов решения этой проблемы связана с именами многих видных математиков. Кроме вышеперечисленных, отметим имена и работы Б. А. Алиева, А. Б. Бакушинского, Г. М. Вайникко, В. В. Васина, В. В. Воеводина, С. Ф. Гилязова, А. В. Гончарского, А. И. Гребенникова, С. Джумаева, С. И. Кабанихина, Ю. А. Кузнецова, А. С. Леонова, О. А. Лисковца, В. А. Морозова, В. И. Мелешко, Р. А. Шафиева, В. Н. Фадеевой, А. Г. Яголы, A. S. Deif, L. Elden, R. Penrose, P. Wedin и многих других математиков. Для решения симметрических систем с неотрицательной плохо обусловленной матрицей В. Н. Фадеевой предложен метод, основанный на малом вещественном сдвиге диагональных элементов матрицы системы, согласованном с погрешностями входных данных, а А. Б. Бакушинским – на малое мнимое число. Упрощенный алгоритм регуляризации использован В. А. Морозовым и С. Ф. Гилязовым при решении системы с симметрической и неотрицательно определенной матрицей. Эффективно решена И. К. Лифановым переопределенная система посредством введения в нее дополнительной неизвестной. Общность этих результатов заключается в том, что к матрице системы добавляется единичная матрица, умноженная на малое вещественное или мнимое число. Избранный в диссертации подход позволил установ-

вить критерий применимости метода регуляризации сдвигом на произвольную матрицу, умноженную на произвольное ненулевое малое комплексное число, а также распространить этот метод и в бесконечномерном случае при решении операторных уравнений в гильбертовых пространствах.

2. Влияние погрешностей задания оператора (матрицы) и правой части на определение псевдорешений, квазирешений и оценки скорости сходимости регуляризующих алгоритмов было предметом исследования многих математиков: А. Л. Агеева, А. В. Баева, А. Б. Бакушинского, В. В. Васина, В. А. Винокурова, В. В. Воеводина, С. Ф. Гилязова, М. К. Гавурина, А. В. Гончарского, А. Р. Данилина, С. Джумаева, Е. Н. Доманского, И. Н. Домбровской, П. Н. Заикина, В. К. Иванова, В. А. Ильина, В. А. Коршунова, М. М. Лавретьева, А. С. Леонова, О. А. Лисковца, В. П. Маслова, А. С. Меченова, В. А. Морозова, В. П. Тананы, А. Н. Тихонова, Ю. М. Фетисова, Ю. И. Худака, А. А. Штаркмана, А. Г. Яголы, O.N.Strand. При оценке скорости сходимости метода регуляризации А.Н. Тихонова с приближенно заданными оператором и правой частью В. В. Воеводиным и В. А. Морозовым был получен порядок, равный двум третьих для совместных, и лишь одну вторую для несовместных уравнений от погрешности в задании оператора. Затем В. А. Морозовым и С. Ф. Гилязовым в предположении истокопредставимости искомого решения и С. Джумаевым при предположении (α,β)-расщепляемости точного оператора был получен оптимальный порядок сходимости метода регуляризации. Предложенный в диссертации метод позволил получить оптимальный порядок сходимости метода регуляризации сдвигом с приближенно заданными оператором и правой частью, исходя только из нормальной разрешимости оператора как в случае совместного, так и в случае несовместного уравнения. Этот результат дал возможность распространить результаты В. А. Морозова, С. Ф. Гилязова и С. Джумаева требуя только нормальную разрешимость точного оператора, а в задаче L-псевдообращения В. А. Морозова – дополнительно требуя взаимную дополнительность точных операторов.

3. Решение многих теоретических вопросов и прикладных задач математики, механики, физики и техники приводит к различным классам – одномерных, многомерных, линейных и нелинейных сингулярных интегральных уравнений. Достаточно хорошо разработана теория линейных и некоторых классов нелинейных сингулярных интегральных уравнений. Имеется огромное количество опубликованных работ в этом направлении. Достаточно привести в качестве примера только монографии, опубликованные у нас в стране В. М. Александровым, В. А. Бабешко, С. М. Белоцерковским, Н. П. Векуа, И. И. Воровичем, Б. Г. Габдулхаевым, Ф. Д. Гаховым, В. В. Голубевым, И. Ц. Гохбергом, А. П. Дацышиным, В. В. Ивановым, В. А. Какичевым, А. И. Каландия, Н. Я. Крупником, В. Д. Купрадзе, Г. С. Литвинчуком, И. К. Лифановым, С. Г. Михлиным, Н. И. Мусхелишвили, В. В. Панасюком, А. Н. Панченковым, В. З. Партоном, П. И. Перлиным, З. Прёсдорфом, М. П. Савруком, Ю. И. Черским, Л. И. Чибриковой.

Сингулярные уравнения в очень редких случаях решаются в явном виде. Даже в этом случае для получения числовых значений необходимо уметь вычислять сингулярные интегралы. Поэтому как для теории, так и, в особенности, для приложений особое значение приобретает разработка приближенных методов вычисления сингулярных интегралов и решения сингулярных уравнений. Обзоры состояния численных методов решения этих уравнений приведены в работах С. М. Белоцерковского, Б. Г. Габдулхаева, В. В. Иванова, И. К. Лифанова, Е. Е. Тыртышникова, З. Прёсдорфа, M, Borja, H. Brakhage, B. Silbermann. Разрешимость, и в частности, однозначная разрешимость сингулярных интегральных уравнений Гильберта нейтрального типа и их дискретных аналогов имеет особое место в рассматриваемом вопросе. В работах Н. Г. Афендиковой, С. М. Белоцерковского, И. К. Лифанова, А. Ф. Матвеева, Б. И. Мусаева, Л. А. Онегова, Т. С. Полянской, М. А. Шешко, М. М. Солдатова, Е. Е. Тыртышникова получен ответ на поставленные вопросы, когда ядрами интегральных операторов регулярной части уравнения Гильберта нейтрального типа являются отдельно взятые тригонометрические функции. Эта проблема для сингулярных интегральных уравнений Гильберта нейтрального типа (первого и второго рода) с разностными и суммарными регулярными частями, ядра которых являются произвольными тригонометрическими полиномами, и общий подход решения и регуляризация их дискретных аналогов требовали своего исследования. Разработанный метод в диссертации позволил ответить на поставленные вопросы.

4. Исследование периодической задачи для систем линейных дифференциальных уравнений можно разделить на две принципиально разные части. В первой части, называемой регулярным случаем (т. е. при отсутствии резонанса), периодическая задача разрешима и имеет единственное решение. Для этой ситуации имеются эффективные приемы построения решений такие, как методы малого параметра, интегральных уравнений, сеточные методы и другие. Не менее важной является вторая часть, называемая резонансным случаем. Для этой ситуации система дифференциальных уравнений может оказаться неразрешимой или иметь более одного периодического решения. Методы построения периодического решения, используемые в регулярном случае, не применимы в случае резонанса. Это предопределяет необходимость разработки методов исследования и построения решений периодической задачи в случае резонанса. Различные стороны этой проблемы являлись предметом исследования В. Ш. Бурда, В. В. Жикова, Ю. С. Колесова, М. А. Красносельского, Б. М. Левитана, И. Г. Малкина, М. К. Собирова, В. М. Стражинского, В. Х. Харасахала, В. А. Якубовича и др. Метод регуляризации сдвигом решения периодической задачи для систем линейных дифференциальных уравнений позволил получить параметрическое семейство периодических решений, равномерно сходящееся к периодическому решению системы.

Цель и задачи исследования. Целью диссертационной работы является разработка теории регуляризации сдвигом для решения систем линейных алгебраических уравнений (конечномерный случай) и абстрактных операторных уравнений (бесконечномерный случай), а также приложение разработанной теории для исследования прямых и двойственных задач L-псевдообращения, разрешимости, в частности, однозначной разрешимости сингулярного интегрального уравнения Гильберта нейтрального типа и разработки быстрых алгоритмов решения его дискретного аналога, периодической задачи для систем линейных дифференциальных уравнений. Для этой цели в диссертации доказываются равномерная ограниченность семейства обратных матриц и операторов, зависящих от параметра, равенства проекторов и равенства ядер линейных операторов, существование матричного представления линейных операторов, действующих в гильбертовых пространствах, аналогичного блочному представлению квадратной матрицы с ранговой подматрицей, инвариантность срезок ряда Фурье функций класса Гельдера, эквивалентность интегральных уравнений бесконечным системам линейных алгебраических уравнений.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования являются системы линейных алгебраических уравнений, абстрактные операторные уравнения в гильбертовом пространстве, сингулярное интегральное уравнение Гильберта нейтрального типа, системы линейных дифференциальных уравнений. Предмет исследования – регуляризация сдвигом системы линейных алгебраических и абстрактных операторных уравнений, однозначная разрешимость сингулярных интегральных уравнений и их дискретных аналогов, сходимость регуляризации сдвигом решения периодической задачи для систем дифференциальных уравнений. Оценки точности получаемых приближений в зависимости от величин погрешности исходных данных.

Методология и методы проведенного исследования. В диссертационной работе используются методы линейной алгебры, регуляризации А. Н. Тихонова, вычислительной математики, функционального анализа, теории операторов, сингулярных интегральных уравнений, теории функций комплексной переменной.

Научная новизна полученных результатов. Основные результаты, полученные в диссертации, являются новыми. В тех случаях, когда изложение требует воспроизведения результатов и конструкций, принадлежащих другим авторам, это специально оговаривается и подчеркивается.

Рассмотрим, с этой точки зрения, каждую главу диссертации. Сдвиг на единичный оператор, умноженный на малое вещественное или чисто мнимое число при решении уравнений, с самосопряженным и неотрицательно определенным оператором, рассматривался М. М. Лаврентьевым, В. Н. Фадеевой, А. Б. Бакушинским и В. А. Морозовым. Сдвиг на произвольный оператор, умноженный на произвольное малое комплексное число до работ автора не рассматривался и потому критерий выбора оператора, на который осуществляется сдвиг другими авторами не исследовался. Успешно применяемая в приложениях непараметрическая регуляризация сдвигом и оптимальная сходимость с помощью рангового оператора не изучались.

Во второй главе речь идет о решении прямых и двойственных задач L-псевдообращения В. А. Морозова. Им, а также Б. А. Алиевым, В. И. Мелешко, Р. А. Шафиевым были установлены однозначная разрешимость вариационной задачи L-псевдообращения и сходимость ее решения. Оптимальный порядок сходимости решения вариационной задачи с приближенными данными для нормально разрешимых задач получили В. А. Морозов, С. Ф. Гилязов, С. Джумаев. В этих работах предполагалось выполнение некоторых дополнительных условий, предъявляемых к правой части и оператору. Не был получен оптимальный порядок сходимости метода регуляризации А. Н. Тихонова и решение задачи L-псевдообращения В. А. Морозова, исходя только из нормальной разрешимости точного оператора и взаимной дополнительности операторов. Также не было установлено совпадение и отличие решений прямой и двойственной стационарных и вариационных задач.

В третьей главе диссертации речь идет о разрешимости, и, в частности, однозначной разрешимости сингулярных интегральных уравнений Гильберта нейтрального типа и их дискретных аналогов. И. К. Лифанов для нахождения решения с нулевым средним дискретного аналога сингулярного интегрального уравнения Гильберта ввел дополнительное неизвестное, названное им регуляризующим фактором. Он совместно с С. М. Белоцерковским и М. М. Солдатовым получил разрешимость в пространствах Гёльдера сингулярного интегрального уравнения типа Гильберта с дополнительным регулярным интегральным оператором с суммарным ядром, состоящим из одной экспоненты первого порядка, используя метод дискретных вихрей. Не было выполнено полное исследование разрешимости сингулярных интегральных уравнений типа Гильберта с дополнительными регулярными интегральными операторами с разностными и суммарным ядрами, состоящими из произвольных тригонометрических полиномов в пространствах Гёльдера и Лебега. А также не рассматривалось применение непараметрического метода регуляризации сдвигом для решения дискретных аналогов этих уравнений. В диссертации полностью исследованы эти перечисленные проблемы, а также найдены в явном виде спектры сингулярных интегральных операторов нейтрального типа первого и второго рода, действующих в любых из указанных пространств функций, и спектры их дискретных аналогов, действующих в конечномерных пространствах Лебега.

В четвертой главе рассматривается периодическая задача для систем линейных дифференциальных уравнений. С помощью метода регуляризации сдвигом получено устойчивое решение периодической задачи для систем линейных дифференциальных уравнений, как в регулярном, так и резонансном случаях.

Практическая значимость полученных результатов. Результаты работы имеют и теоретический, и прикладной характер. Они могут применяться в аэродинамике, теории упругости и теории трещин. Алгоритмы для решения дискретных аналогов сингулярного интегрального уравнения Гильберта нейтрального типа имеют многократное преимущество и по времени счета, и по экономии объема используемой оперативной памяти, и по точности результатов, по сравнению с методом Гаусса.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

1. В диссертации впервые сформулирована проблема регуляризации сдвигом и доказаны критерии сходимости регуляризации сдвигом для систем линейных алгебраических уравнений (конечномерный случай) и абстрактных операторных уравнений в гильбертовом пространстве (бесконечномерный случай). Выявлены существенные особенности регуляризации сдвигом в бесконечномерном случае и указаны ее отличия от аналогичной задачи для систем линейных алгебраических уравнений (конечномерный случай).

2. Получены и обоснованы оптимальные оценки скорости сходимости метода регуляризации А. Н. Тихонова и решений вариационной задачи L-псевдообращения В. А. Морозова для нормально разрешимых задач с приближенными данными при самых общих предположениях.

3. Впервые проведен полный анализ разрешимости и однозначной разрешимости сингулярных интегральных уравнений Гильберта нейтрального типа в пространствах Гёльдера и Лебега, основанный на связи этих уравнений с бесконечными системами линейных алгебраических уравнений.

4. Предложена новая методика решения а) дискретных задач, связанных с интегральными уравнениями Гильберта нейтрального типа и б) периодической задачи для систем линейных дифференциальных уравнений, связанная с методом регуляризации сдвигом.

5. Разработаны алгоритмы быстрого решения дискретных аналогов сингулярных интегральных уравнений Гильберта нейтрального типа, основанные на методе быстрого преобразования Фурье.

Апробация результатов диссертации. Вошедшие в диссертацию результаты докладывались на Ломоносовских чтениях (Москва, НИВЦ МГУ им. М. В. Ломоносова, 1982 – 1986, 2005 – 2012 гг.), на Всесоюзной школе – семинар по некорректно поставленным задачам (Фрунзе, 1979 г., Саратов, 1981 г., Самарканд, 1983 г.), на всесоюзном симпозиуме «Метод дискретных вихрей» (Харьков, 1985 г.), на международной конференции «Алгоритмический анализ некорректных задач» (Екатеринбург, 1995 г., 1998 г., 2008 г., 2011 г.), на международной конференции «Вопросы оптимизации вычислений» (Крым, 2009 г., 2011г.), на семинаре С. И. Похожаева, В. А. Кондратьева (Москва, МИ им. В. В. Стеклова, 2009 г.), на семинаре В. В. Васина (ИММ УрАН, Екатеринбург, 2011 г. и 2012 г.), на семинаре А Б. Бакушинского, А. В. Тихонравова, А. Г. Яголы (Москва, НИВЦ МГУ, 2012 г.), на семинаре Е. Е. Тыртышникова (Москва, МГУ, 2012 г.), на семинаре С. И. Кабанихина (Новосибирск, 2012 г). Полное содержание диссертации в течении многих лет докладывалось на семинарах

В. А. Морозова (Москва, НИВЦ МГУ им. М. В. Ломоносова, 1979 – 2012 гг.) и на семинарах Э. М. Мухамадиева (Душанбе, 1979 – 1994 гг., Худжанд, 1995 – 2002 гг., Вологда, 2003 – 2012 гг.).

Публикации. По теме диссертации опубликована две монографии и 38 статей в научных журналах и других изданиях, 14 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК. Полный список работ приведен как в автореферате, так и в тексте диссертации.

Конкретный личный вклад автора в разработку положений, изложенных в диссертации, и получении научных результатов. Все результаты диссертации (и, в частности, те из них, которые были опубликованы в совместных работах с другими авторами) принадлежат лично автору диссертации. Общие идеи, относящиеся к главам 1 и 2 обсуждались с В. А. Морозовым и Э. М. Мухамадиевым. Вычислительные эксперименты, связанные с численным решением сингулярного интегрального уравнения Гильберта второго рода, проведены совместно с М. Муллоджановым.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка используемых источников. Список насчитывает 204 наименований. Полный объем диссертации составляет 314 страниц, в том числе список используемых источников занимает 16 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **ВВЕДЕНИИ** обосновывается актуальность темы диссертационной работы, формулируется цель, описывается научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы, излагаются основные результаты исследования.

В **ПЕРВОЙ ГЛАВЕ** исследуются теоретические основы метода регуляризации сдвигом. В § 1.1 дано определение регуляризации сдвигом в конечномерном случае, при нахождении решения систем линейных алгебраических уравнений

$$Ax = f\,, \tag{1}$$

минимизирующего функционал $\|PBx\|$, где $A = A_{N\times N}$ и $B = B_{N\times N}$ – произвольные матрицы, P – ортогональный проектор на ядро сопряженной матрицы A^*, $f \in \mathbb{C}^N$ – заданный, $x \in \mathbb{C}^N$ – искомый векторы, $\mathbb{C}^N$ есть N-мерное комплексное пространство. Так как матрица A может являться и вырожденной, то случай прямоугольной матрицы сводится к эквивалентному квадратному случаю. Для этого достаточно окаймлять прямоугольную матрицу нулевыми строками или столбцами до получения квадратной матрицы. Регуляризацией сдвигом данной системы является СЛАУ

$$(A + \lambda B)x = f\,, \tag{2}$$

зависящая от комплексного параметра λ. Требования, которым должна удовлетворять матрица B, выражаются в виде свойств, которыми должна обладать параметрическая СЛАУ (2):

1) для всех $f \in \mathbb{C}^N$ и достаточно малых $|\lambda| > 0$ СЛАУ (2) имеет единственное решение $x_\lambda = x_\lambda(f)$;

2) для всех $f \in R(A)$ решение x_λ СЛАУ (2) сходится при $\lambda \to 0$ к решению СЛАУ (1).

Если матрица A обратимая, то СЛАУ (2) является регуляризацией сдвигом СЛАУ (1). В качестве матрицы B можно брать любую матрицу, порядок которой совпадает с порядком A.

Если матрица A необратимая, то матрица B должна удовлетворять определенным условиям, которые приводятся в теореме 1.

Теорема 1. ***Следующие утверждения эквивалентны:***

- ***семейство* (2) *является регуляризацией сдвигом* (1);**
- $\exists \lambda_0 \in \mathbb{C}$ ***такое, что*** $\Delta(\lambda_0) \neq 0$ ***и имеет место равенство***

$$R(A) \cap R(BQ) = \{0\}, \quad Q = E - A^+A;$$

- ***имеет место равенство*** $F^+F = Q$, $F = PBQ$, $P = E - AA^+$;
- ***имеет место равенство*** $FF^+ = P$;
- ***справедливо разложение в матричный ряд***

$$(A+\lambda B)^{-1}=\lambda^{-1}F^{+}+\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^{m}(TB)^{m}T\left(BF^{+}-E\right),\quad T=\left(F^{+}B-E\right)A^{+},$$

где $\lambda\in C$, $0<|\lambda|<\rho^{-1}$, ρ ***– спектральный радиус матрицы-оператора*** TB***;***

- ***имеет место оценка*** $\left\|(A+\lambda B)^{-1}\right\|=O\left(|\lambda|^{-1}\right),\quad \lambda\in\Lambda_0$***;***
- ***имеет место оценка*** $\left\|\lambda(A+\lambda B)^{-1}\right\|\le\text{const},\quad \lambda\in\Lambda_0$***;***
- ***имеет место оценка*** $\left\|\lambda(A+\lambda B)^{-1}B\right\|\le\text{const},\quad \lambda\in\Lambda_0$***;***
- ***имеет место оценка*** $\left\|(A+\lambda B)^{-1}A\right\|\le\text{const},\quad \lambda\in\Lambda_0$***;***
- ***имеет место равенство*** $R(A)+R(BQ)=\mathbb{C}^n$***;***
- ***имеет место неравенство*** $\Delta^{(k)}(0)\ne0$, ***где*** $\Delta(\lambda)=\det(A+\lambda B)$, $k=n-r$, $r=\operatorname{rank}A$***;***
- ***имеют место неравенства***

$$\det A_{11}\ne0,\qquad \det\left(B_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}B_{12}-B_{21}A_{11}^{-1}A_{12}+A_{21}A_{11}^{-1}B_{11}A_{11}^{-1}A_{12}\right)\ne0,$$

где A_{ij} ***и*** B_{ij} ***– составляющие блочного представления матриц*** A ***и*** B***:***

$$A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix},$$

где A_{11} ***и*** B_{11} ***– квадратные матрицы порядка*** r, $r=\operatorname{rank}A$.

Заметим, если в (2) вместо четверки (A, B, λ, f) положить $\left(A^*A, E, \alpha, A^*f\right)$, где A^* – комплексно-сопряженная матрица для матрицы A, E – единичная матрица, $\alpha>0$, то получается регуляризатор А. Н. Тихонова; при $\left(A^*A, L^*L, \alpha, A^*f\right)$ получается СЛАУ, решение которой сходится к L- псевдорешению В. А. Морозова; при (A, E, α, f), где $A=A^*\ge0$, $\alpha>0$, получается регуляризация М. М. Лаврентьева, а если $A=A^*\ge0$ – плохо обусловленная матрица, то получается метод сдвига, рассмотренной В. Н. Фадеевой; при $(A, E, i\alpha, f)$, где $A=A^*\ge0$, $\alpha>0$, i – мнимая единица, получается регуляризация А. Б. Бакушинского; при $B=\sum_{m=1}^{k}g_m^*e_m$, где e_m, g_m^*, $m=\overline{1,k}$ – ортонормированные базисы в $\ker A$ и $\ker A^*$ соответственно, получаем СЛАУ для нахождения приближенных значений точек ветвления нелинейных уравнений, изученных Н. А. Сидоровым и В. А. Треногиным и численного решения сингулярных интегральных уравнений теории упругости и аэродинамики, рассмотренных Н. Г. Афендиковой, С. М. Белоцерковским и И. К. Лифановым.

В § 1.2 изучается вопрос регуляризации совместной системы (1) параметрическим семейством

$$(A+\lambda E)x=f\,, \qquad (3)$$

когда $B=E$ – единичная матрица порядка N. Если предполагать, что A – неотрицательный самосопряженный оператор и $\lambda=\alpha>0$, то из этого семейства получается регуляризация М. М. Лаврентьева, для симметрической плохо обусловленной матрицы A получается метод сдвига В. Н. Фадеевой, а если $\lambda=i\alpha,\ \alpha>0$ – регуляризация А. Б. Бакушинского. Нашей целью является выявление наиболее широкого класса матриц A, для которых рассматриваемое параметрическое семейство является регуляризацией сдвигом (1), и изучение случая, когда матрица A – циркулянтная.

Теорема 2. ***Для того, чтобы семейство* (3) *являлось регуляризацией сдвигом* (1)*, необходима и достаточна полупростота нулевого собственного значения матрицы* A.**

Из этой теоремы следует, что если C и C_0 – произвольные циркулянты одного порядка, то каждое из семейств $(C+\lambda E)x=f$ и $\left(C+\lambda C_0\right)x=f$, $\det C_0\neq 0$, является регуляризацией сдвигом системы $Cx=f$, справедливость которого следует из того, что все собственные значения циркулянтной матрицы являются полупростыми.

В § 1.3 приводятся необходимое и достаточное условия сходимости решения регуляризации сдвигом (2) к нормальному решению СЛАУ (1) при $\lambda\to 0$. Тем самым устанавливается признак, когда предельное значение регуляризованного решения при $\lambda\to 0$ не зависит от матрицы B.

Теорема 3. ***Для того, чтобы регуляризованные сдвигом решения параметрической системы* (2) *сходились к нормальному решению* (1)*, необходимо и достаточно выполнение равенства* $F^{+}B=Q$*, где* $F=PBQ$*,* Q *и* P *– ортопроекторы на* $\ker A$ *и* $\ker A^{*}$ *соответственно.***

Важным с точки зрения приложений является случай, когда

$$B=\sum_{m=1}^{k} g_m e_m^{*}\,, \qquad (4)$$

где $\{e_m\}$ и $\{g_m\}$ – ортогональные базисы в $\ker A$ и $\ker A^{*}$.

При практическом применении теории регуляризации в решении той или иной задачи, в частности, при решении СЛАУ, важным является выбор параметра регуляризации. Как правило, этот выбор сопровождается большими трудностями. В § 1.4 рассматривается непараметрическая регуляризация сдвигом, то есть $\lambda=1$:

$$(A+B)x=f\,, \qquad (5)$$

в которой не участвует параметр регуляризации. Это освобождает исследователя от выбора параметра регуляризации. Если B определена равенством (4), то при $f\in R(A)$ нормальное решение (1) имеет вид $x_0=\left(A+\sum_{m=1}^{k} g_m e_m^{*}\right)^{-1} f$, при

$f \notin R(A)$ нормальное псевдорешение (1) имеет вид $x_0^+ = \left(A + \sum_{m=1}^{k} g_m e_m^* \right)^{-1} g$, где $g = f - \sum_{m=1}^{k} (f, e_m) g_m$.

Непараметрическая регуляризация сдвигом используется и при решении задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

В § 1.5 определена регуляризация сдвигом в гильбертовом (бесконечномерном) пространстве для решения абстрактных операторных уравнений (ОУ) (1). Регуляризация в бесконечномерном случае существенно отличается от конечномерного случая. Во-первых, образы $R(A)$ и $R(A^*)$ в конечномерном пространстве – замкнутые, а в бесконечномерном пространстве – не всегда; во-вторых, сходимость решения $x_\lambda(f)$ уравнения (2) в конечномерном пространстве при $\lambda \to 0$ является равномерной на любом ограниченном множестве $R_0 \subset R(A)$, тогда как сходимость в бесконечномерном пространстве может являться равномерной или неравномерной, сильной или слабой; в-третьих, в конечномерном пространстве для любой матрицы A существует такая матрица B, что семейство (2) является регуляризацией сдвигом ОУ (1), а в бесконечномерном пространстве не для всякого оператора A существует оператор B, для которого семейство (2) является регуляризацией сдвигом ОУ (1) и т.д. Основным результатом данного параграфа является

Теорема 4. ***Следующие утверждения эквивалентны:***

- ***семейство ОУ* (2) *является регуляризацией сдвигом ОУ* (1);**
- ***имеет место оценка*** $\left\| \lambda (A + \lambda B)^{-1} \right\| \le M = \text{const}, \qquad \lambda \in \Lambda_0$;
- ***оператор*** A ***нормально разрешимый, а*** $F_0 : \ker A \to \ker A^*$ ***– ограниченно обратимый;***
- ***имеет место оценка*** $\left\| \lambda (A + \lambda B)^{-1} B \right\| \le M_1 = \text{const}, \lambda \in \Lambda_0$;
- ***имеет место оценка*** $\left\| (A + \lambda B)^{-1} A \right\| \le M_2 = \text{const}, \lambda \in \Lambda_0$;
- ***имеет место оценка*** $\left\| \lambda B (A + \lambda B)^{-1} \right\| \le M_3 = \text{const}, \lambda \in \Lambda_0$;
- ***имеет место оценка*** $\left\| A (A + \lambda B)^{-1} \right\| \le M_4 = \text{const}, \lambda \in \Lambda_0$;
- ***оператор*** A^* ***нормально разрешимый,*** $F_0^* : \ker A^* \to \ker A$ ***– ограниченно обратимый;***
- ***операторы*** A ***и*** F ***нормально разрешимые и имеет место операторное равенство*** $F^+ F = Q, \qquad F = PBQ$;
- ***операторы*** A ***и*** F ***нормально разрешимые и имеет место операторное равенство*** $FF^+ = P$;

- ***операторы*** A ***и*** F ***нормально разрешимые и имеет место разложение в операторный ряд*** $(A+\lambda B)^{-1}=\lambda^{-1}F^{+}+\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^{m}(TB)^{m}T\left(BF^{+}-E\right)$***; где*** $\lambda\in\mathbb{C}$***:*** $0<|\lambda|\le\rho_0<\rho^{-1}$, $\rho=\rho(TB)$ ***– спектральный радиус*** $TB:H\to H$***;***
- ***имеют место*** $\ker A\bigcap\ker B=\{0\}$, $R(A)\oplus R(BQ)=H$***;***
- ***имеют место*** $\ker A^{*}\bigcap\ker B^{*}=\{0\}$, $R\left(A^{*}\right)\oplus R\left(B^{*}P\right)=H$ **.**

Уравнение (1) в бесконечномерном пространстве, в общем случае, не является регуляризуемым методом сдвига. Указан признак выбора оператора B, гарантирующего регуляризуемость сдвигом (1).

В § 1.6 вводятся понятия порождающей четверки и рангового оператора. Для любого линейного преобразования, действующего в конечномерном пространстве $\mathbb{C}^{n}$, существуют бесчисленно много базисов, в которых его матрица представляется в блочном виде $A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}$, где A_{11}, A_{22} – квадратные матрицы порядка $r=\operatorname{rank}A<n$ и $n-r$. Если $\det A_{11}\ne 0$, $A_{22}=A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$, то матрицу A_{11} назовем **ранговой матрицей** матрицы A.

Рассмотрим эту проблему в гильбертовом (бесконечномерном) пространстве. Для данного линейного оператора вводится понятие порождающей четверки и доказывается критерий регуляризации сдвигом уравнения (1). Доказана

Теорема 5. ***Для того, чтобы семейство*** **(2)** ***являлось регуляризацией сдвигом уравнения*** **(1),** ***необходима и достаточна ограниченная обратимость оператора***

$$D_1\equiv B_{00}-A_{01}A_{11}^{-1}B_{10}-B_{01}A_{11}^{-1}A_{10}+A_{01}A_{11}^{-1}B_{11}A_{11}^{-1}A_{10}.$$

В § 1.7 рассматривается задача регуляризации сдвигом, когда вместо точных данных A, B, f известны их приближения $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{f}$, связанные соотношениями $\|\tilde{A}-A\|\le\mu$, $\|\tilde{B}-B\|\le\nu$, $\|\tilde{f}-f\|\le\delta\|f\|$, где $\mu\ge 0, \nu\ge 0, \delta\ge 0$ – известные величины (погрешности аппроксимации). Доказаны оптимальные оценки скорости сходимости метода регуляризации сдвигом. Пусть H_1, H_0, F_1, F_0 – произвольная порождающая четверка. Тогда точные и приближенные данные представляются в виде $A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{10}\\ A_{01} & A_{00}\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}B_{11} & B_{10}\\ B_{01} & B_{00}\end{bmatrix}, f=\begin{bmatrix}f_1\\ f_0\end{bmatrix}$, где $A_{ij}:H_j\to F_i$, $B_{ij}:H_j\to F_i$, $i, j=0, 1$.

Теорема 6. ***Пусть выполнены условия*** $|\lambda|\to 0$, $\mu\le\varepsilon|\lambda|$, $\nu\to 0$***, где*** $\varepsilon\in\left[0,\varepsilon_0\right]$ ***– произвольное, а*** ε_0 ***– некоторое достаточно малое положительное число. Тогда для равномерной ограниченности семейства операто-***

ров $\left\{\lambda\left(\tilde{A}+\lambda\tilde{B}\right)^{-1}\right\}$, $\lambda\in\Lambda_0$, ***необходима и достаточна ограниченная обратимость опeратра*** $T_1 : H_0 \to F_0$, ***где***

$$T_1 = B_{00} - A_{01}A_{11}^{-1}B_{10} - B_{01}A_{11}^{-1}A_{10} + A_{01}A_{11}^{-1}B_{11}A_{11}^{-1}A_{10}.$$

Во **<u>ВТОРОЙ ГЛАВЕ</u>** исследуются стационарные и вариационные прямые и двойственные задачи L-псевдообращения В. А. Морозова. В. А. Морозовым., Б. А. Алиевым, В. И. Мелешко, Р. А. Шафиевым были установлены однозначная разрешимость вариационной задачи L-псевдообращения и сходимость ее решения. Оптимальный порядок сходимости решения вариационной задачи с приближенными данными для нормально разрешимых задач получили В. А. Морозов, С. Ф. Гилязов и С. Джумаев. В этих работах предполагалось выполнение некоторых дополнительных условий, предъявляемых к правой части и оператору. Оптимальный порядок сходимости метода регуляризации А. Н. Тихонова и решение задачи L-псевдообращения В. А. Морозова, исходя только из нормальной разрешимости точного оператора и взаимной дополнительности операторов A и L не был получен. Также не былы установлены совпадение и отличие решений прямой и двойственной стационарных и вариационных задач.

В § 2.1, § 2.2 рассмотрены прямые и двойственные задачи L-псевдообращения. Пусть $A: H \to F$ и $L: H \to G$ – линейные ограниченные операторы, $f \in F$ и $g \in G$ – заданные элементы, а H, F и G – гильбертовы пространства. Задачу нахождения квазирешения операторного уравнения $Lx = g$ $(Ax = f)$ на множестве псевдорешений операторного уравнения $Ax = f$ $(Lx = g)$ назовем прямой (двойственной) стационарной задачей L-псевдообращения и обозначим $(S;\ f,\ g)$ (соответственно $\left(S^*;\ f,\ g\right)$). Задачу $\|Ax - f\|^2 + \alpha\|Lx - g\|^2 \to \min$, $x \in H$, где $\alpha > 0$, и исследование предельного свойства решения при $\alpha \to 0$ (соответственно при $\alpha \to \infty$) назовем прямой (двойственной) вариационной задачей L-псевдообращения и обозначим $(V;\ f,\ g)$ (соответственно $\left(V^*;\ f,\ g\right)$).

Основным условием назовем нормальную разрешимость оператора A и взаимную дополнительность операторов A и L. Если вместо нормальной разрешимости A требовать нормальную разрешимость L, то его назовем **двойственным основным условием.** В диссертации получены явные представления решения: а) прямой и двойственной стационарных задач, как при выполнении основного условия, так и при его невыполнении; б) прямой и двойственной вариационных задач при выполнении соответствующих основных условий. Доказаны оценки скорости сходимости решений вариационных задач к решениям соответствующих стационарных задач при $\alpha \to 0$ и $\alpha \to \infty$. Показано, что из условия взаимной дополнительности операторов A и L вытекает справедливость равенства $\ker A \cap \ker L = \{0\}$ и в конечномерных, и в бесконечномерных пространствах, а обратное утверждение – только в конечномерном случае. Решения вариационной задачи представлены с помощью операторного ряда, для которого указан точный круг его сходимости. Установлены связь решений прямых и двойственных задач и их эквивалентности в некоторых случаях.

Теорема 7. ***Пусть*** $f \in F$ ***и*** $g \in G$ ***– произвольные элементы. Тогда совместная система*** $\begin{cases} Ax = f_{01}, \\ Lx = g_{01} \end{cases}$***, где*** $\begin{cases} f_{01} = AA^{+} f, \\ g_{01} = LA^{+} f + L\left(LQ_{A}\right)^{+}\left(g - LA^{+} f\right), \end{cases}$ ***эквивалентна:*** **а)** ***задаче*** $(S; f, g)$***;*** **б)** ***задаче*** $(S^{*}; f, g)$***.***

В §§ 2.3 – 2.4 рассмотрены задачи L-псевдообращения и регуляризация А. Н. Тихонова, когда вместо точных данных известны их приближенные значения: $\left\|\tilde{A} - A\right\| \le \mu$, $\left\|\tilde{L} - L\right\| \le \mu$, $\left\|\tilde{f} - f\right\| \le \varepsilon \|f\|$, $\|\tilde{g} - g\| \le \varepsilon \|g\|$, где $\mu > 0$, $\varepsilon > 0$ – произвольные, достаточно малые величины. Доказаны оптимальные по порядку оценки сходимости решения вариационных задач с приближенными данными $\tilde{x}_{\alpha}\left(\tilde{A}, \tilde{L}, \tilde{f}, \tilde{g}\right)$ к решению стационарной задачи с точными данными $x_{0}(A, L, f, g)$, если стационарная задача – совместная, и полученная оценка распространена и для несовместного случая.

ТРЕТЬЯ ГЛАВА содержит исследование разрешимости, в частности, однозначной разрешимости сингулярных интегральных уравнений Гильберта нейтрального типа (первого и второго рода) с разностными и суммарными регулярными частями, ядра которых являются произвольными тригонометрическими полиномами, и разработан общий подход их решения и регуляризации соответствующих дискретных уравнений. В § 3.1 определяется сингулярный интегральный оператор Гильберта нейтрального типа: $A = T + K_{1} + K_{2}$, где

$$(Tx)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg} \frac{t - s}{2} x(s) ds, \ \left(K_{1} x\right)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k_{1}(t - s) x(s) ds,$$

$$\left(K_{2} x\right)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k_{2}(t + s) x(s) ds, \ k_{1}(\tau) = \sum_{m=-M}^{M} b_{m} e^{im\tau}, \ k_{2}(\tau) = \sum_{m=-M}^{M} c_{m} e^{im\tau};$$

первый интеграл понимается в смысле главного значения интеграла по Коши, $b_{m} \in \mathbb{C}$, $c_{m} \in \mathbb{C}$ $(m = 0, \pm 1, \ldots, \pm M)$; $M \in \mathbb{N}$ – произвольные числа. В § 3.2 приводятся свойства частичных сумм Фурье $S_{n} f$ и Фейера $\sigma_{n} f$, используемых в диссертации. В § 3.3 доказан признак аппроксимируемости гёльдеровых функций тригонометрическими полиномами. Пространство гёльдеровых 2π-периодических функций H^{α} не является сепарабельным. Например, функции:

$$x_{\beta}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < \beta \\ (t - \beta)^{\alpha}, & \beta \le t < 1, \qquad (0 < \beta < 1) \\ \dfrac{x - 2\pi}{1 - 2\pi}(1 - \beta)^{\alpha}, & 1 \le t \le 2\pi, \end{cases}$$

принадлежат пространству H^{α} и для любых $\beta', \beta'' : 0 \le \beta' \ne \beta'' < 1$ справедлива оценка $\left\| x_{\beta'} - x_{\beta''} \right\|_{H^{\alpha}} \ge 1$. Поэтому, множество всех тригонометрических полиномов, порожденное системой функций $\varphi_k(t) = e^{ikt}$, $k \in \mathbb{Z}$, не является плотным в этом пространстве. Представляет интерес изучение проблемы о возможности аппроксимации функций гёльдерова пространства тригонометрическими полиномами по норме этого пространства и выявление условия, при выполнении которого возможна такая аппроксимация. В работе доказана

Теорема 8. ***Пусть*** 2π***-периодическая функция*** $f(t)$ ***принадлежит пространству Гёльдера*** $H^{\alpha}[0,2\pi], 0 < \alpha < 1$. ***Для сходимости последовательности*** $\{\sigma_n f\}$ ***– частичных сумм Фейера к самой функции*** $f(t)$ ***в пространстве*** $H^{\alpha}[0,2\pi]$ ***необходимо и достаточно выполнение условия***

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{0<|t-s|<\delta} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t-s|^{\alpha}} = 0.$$

В § 3.4 доказано, что каждая срезка ряда Фурье функции пространства Гельдера является функцией этого пространства:

В § 3.5 доказано утверждение, используемое при исследовании разрешимости сингулярных интегральных уравнений Гильберта первого и второго рода.

Теорема 9. ***Пусть*** $x(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{ikt}$. ***Тогда***

$$ax(t) + (Ax)(t) = (a+i) \sum_{k=-\infty}^{-M-1} x_k e^{ikt} + \sum_{k=-M}^{-1} \left[\left(a + i + b_k\right) x_k + c_k x_{-k} \right] e^{ikt} +$$

$$+\left(a + b_0 + c_0\right) x_0 + \sum_{k=1}^{M} \left[c_k x_{-k} + \left(a - i + b_k\right) x_k \right] e^{ikt} + (a-i) \sum_{k=M+1}^{\infty} x_k e^{ikt};$$

причем, если:

а) $x(t) \in H^{\alpha}$, ***то*** $ax(t) + (Ax)(t) \in H^{\alpha}$; **б)** $x(t) \in L_2$, ***то*** $ax(t) + (Ax)(t) \in L_2$.

В § 3.6 введено понятие эквивалентности бесконечной системы линейных алгебраических уравнений и интегрального уравнения. Будем говорить, что бесконечная система линейных алгебраических уравнений $Ax = f$, $f = \left(f_k\right)_{k=-\infty}^{\infty}$, **эквивалентна** интегральному уравнению $\int\limits_{-\pi}^{\pi} k(t,s) x(s) ds = f(t)$, где $\left(f_k\right)_{k=-\infty}^{\infty}$ – коэффициенты Фурье функции $f(t)$, если решение $\left(x_k\right)_{k=-\infty}^{\infty}$ бесконечной системы является коэффициентами Фурье решения $x(t)$ интегрального уравнения и, наоборот, коэффициенты Фурье решения интегрального уравнения $x(t)$ являются решением $\left(x_k\right)_{k=-\infty}^{\infty}$ бесконечной системы. В следующей теореме утверждается эквивалентности бесконечных систем

$$\begin{cases} ix_k = f_k, & -\infty < k \le -M-1, \\ \left(i+b_k\right)x_k + c_k x_{-k} = f_k, & -M \le k \le -1, \\ \left(b_0+c_0\right)x_0 = f_0, & k=0, \\ c_k x_{-k} + \left(-i+b_k\right)x_k = f_k, & 1 \le k \le M, \\ -ix_k = f_k, & M+1 \le k < +\infty, \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} (a+i)x_k = f_k, & -\infty < k \le -M-1, \\ \left(a+i+b_k\right)x_k + c_k x_{-k} = f_k, & -M \le k \le -1, \\ \left(a+b_0+c_0\right)x_0 = f_0, & k=0, \\ c_k x_{-k} + \left(a-i+b_k\right)x_k = f_k, & 1 \le k \le M, \\ (a-i)x_k = f_k, & M+1 \le k < +\infty \end{cases} \tag{7}$$

и интегральных уравнений

$$(Ax)(t) = f(t), \tag{8}$$

$$ax(t) + (Ax)(t) = f(t): \tag{9}$$

Теорема 10. а) ***Бесконечная система* (6) *эквивалентна интегральному уравнению первого рода* (8);**

б) ***Бесконечная система* (7) *эквивалентна интегральному уравнению второго рода* (9).**

Для исследования вопроса разрешимости рассматриваемых интегральных уравнений первого и второго рода важную роль играет информация о спектре операторов

$$A : H^{\alpha} \to H^{\alpha},\ A : L_2 \to L_2,\ aE + A : H^{\alpha} \to H^{\alpha},\ aE + A : L_2 \to L_2.$$

Если спектры этих операторов соответственно обозначить $\sigma_{L_2}(A)$, $\sigma_{H^{\alpha}}(A), \sigma_{L_2}(aE+A)$, $\sigma_{H^{\alpha}}(aE+A)$ и положить

$$\sigma_0 = \left\{\pm i,\ b_0 + c_0,\ \lambda_{0,k} :\ k = 1, 2, \ldots, M\right\},$$

$$\sigma_a = \left\{a \pm i,\ a + b_0 + c_0,\ \lambda_{a,k} :\ k = 1, 2, \ldots, M\right\},$$

$$\lambda_{0,k} = \frac{1}{2}\left(b_{-k} + b_k \pm \sqrt{\left(b_{-k} - b_k + i2\right)^2 + 4c_{-k}c_k}\right),$$

$$\lambda_{a,k} = \frac{1}{2}\left(2a + b_{-k} + b_k \pm \sqrt{\left(b_{-k} - b_k + i2\right)^2 + 4c_{-k}c_k}\right),$$

то можно сформулировать утверждение о спектрах этих операторов:

Теорема 11. ***Справедливы равенства***

$$\sigma_{L_2}(A)=\sigma_{H^\alpha}(A)=\sigma_0,\ \sigma_{L_2}(aE+A)=\sigma_{H^\alpha}(aE+A)=\sigma_a;$$

причем каждый элемент σ_0 является собственным значением оператора A, а каждый элемент σ_a – собственным значением оператора $aE+A$ в каждом из пространств H^α и L_2.

В § 3.7 приведены формулировки, а в § 3.8 доказательства критериев разрешимости сингулярных интегральных уравнений (8) и (9), и условия их однозначной разрешимости для всех возможных значений коэффициентов регулярной части. Далее, символом HL будет обозначать любое из пространств H^α и L_2. Заметим, что разрешимость уравнения (8) будет следовать из разрешимости уравнения (9) при $a=0$. Рассмотрим матрицы второго порядка

$$B_k=\begin{bmatrix} a+i+b_{-k} & c_{-k} \\ c_k & a-i+b_k \end{bmatrix},\qquad k=1,\dots,M,$$

и их определители

$$\Delta_k=\det(B_k)=(a+i+b_{-k})(a-i+b_k)-c_{-k}c_k\qquad k=1,\dots,M.$$

Будем предполагать, что число a, входящее в уравнение (9), удовлетворяет условиям

$$a\ne i\qquad \text{и}\qquad a\ne -i. \tag{10}$$

Согласно теореме 11, уравнение (9) является однозначно разрешимым в пространстве HL, если $0\notin\sigma_a$. На языке коэффициентов уравнения это утверждение можно формулировать следующим образом:

Теорема 12. ***Для однозначной разрешимости уравнения* (2) *для любой функции $f(t)\in HL$, необходимо и достаточно выполнение условий***

$$a+b_0+c_0\ne 0, \tag{11}$$

$$\Delta_k\ne 0,\qquad k=1,\dots,M. \tag{12}$$

Если $0\in\sigma_a$, то не имеют места некоторые из неравенств (11) и (12). В этом случае для разрешимости уравнения (9) накладываются требования к правой части $f(t)\in HL$, а для однозначной разрешимости – и к искомому решению $x(t)\in HL$.

Теорема 13. ***Пусть имеют место условия* (12) *и***

$$a+b_0+c_0=0. \tag{13}$$

Тогда для разрешимости уравнения* (9) *для данной $f(t)\in HL$ необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt=0, \tag{14}$$

причём, если уравнение* (9) *разрешимо, то для любого комплексного числа d_0 существует только одно решение $x(t)\in HL$, удовлетворяющее условию

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\,dt = d_0. \qquad (15)$$

Если для некоторых $k\in\{1,\dots,M\}$ нарушается условие (12), то есть $\Delta_k = 0$, то для формулировки утверждений о разрешимости уравнения (9), необходимо знать тривиальность или нетривиальность элементов соответствующих матриц B_k. Это диктует вводить в рассмотрение 10 различных ситуаций $\left(A_{k,\,j}\right)$, $j=1,\dots,10$. Если для данного k определитель $\Delta_k = 0$, то имеет место одна и только одна из ситуаций $\left(A_{k,\,j}\right)$, $j=1,\dots,10$. Каждой из этих ситуаций соответствует свое условие разрешимости $\left(B_{k,\,j}\right)$, $j=1,\dots,10$ на правую часть $f(t)$, а в случае однозначной разрешимости – условие $\left(C_{k,\,j}\right)$, $j=1,\dots,10$ на искомое решение $x(t)$. В качестве примера рассмотрим:

$$\left(A_{k,1}\right):\quad a+i+b_{-k}=0,\quad c_{-k}=0,\quad c_k=0,\quad a-i+b_k=0;$$

$$\left(A_{k,2}\right):\quad a+i+b_{-k}\neq 0,\quad c_{-k}=0,\quad c_k=0,\quad a-i+b_k=0;$$

$$\left(B_{k,1}\right):\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ikt}dt=0,\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt=0;$$

$$\left(B_{k,2}\right):\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt=0;$$

$$\left(C_{k,1}\right):\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)e^{ikt}dt=d_k^-,\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)e^{-ikt}dt=d_k^+;$$

$$\left(C_{k,2}\right):\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)e^{-ikt}dt=d_k^+.$$

Теорема 14. ***Пусть имеет место условие* (11) *и для некоторых* $k\in\{1,\dots,M\}$ *– значение* $\Delta_k=0$*. Тогда для разрешимости уравнения* (9) *для данной* $f(t)\in HL$ *в ситуации* $\left(A_{k,\,j}\right)$ *необходимо и достаточно выполнение равенства* $\left(B_{k,\,j}\right)$*; причём, если уравнение* (9) *разрешимо, то для любых комплексных чисел* d_k^- *и* d_k^+ *существует только одно решение* $x(t)\in HL$*, удовлетворяющее условию* $\left(C_{k,\,j}\right)$*,* $j\in\{1,\dots,10\}$*.***

Теорема 15. ***Пусть имеет место условие* (13) *и для некоторых* $k\in\{1,\dots,M\}$ *– условие* $\Delta_k=0$*. Тогда для разрешимости уравнения* (9) *для данной* $f(t)\in HL$ *в ситуации* $\left(A_{k,\,j}\right)$ *необходимо и достаточно выполнение***

равенства $\left(B_{k,\,j}\right)$ ***и*** **(14)*****; причём, если уравнение*** **(9)** ***разрешимо, то для любых комплексных чисел*** d_0***,*** d_k^- ***и*** d_k^+ ***существует только одно решение*** $x(t)\in HL$***, удовлетворяющее условию*** $\left(C_{k,\,j}\right)$***,*** $j\in\{1,\ldots,10\}$ ***и*** **(15).**

В § 3.9 рассматриваются циркулянтные, перциркулянтные и нейтральные системы. Алгоритм быстрого решения циркулянтных систем, основанный на методе быстрого преобразования Фурье имеется в работах В. В. Воеводина и Е. Е. Тыртышникова. Программная реализация метода быстрого преобразования Фурье приведена в монографии А. Н. Тихонова, А. В. Гончарского, В. В. Степанова и А. Г. Яголы. Термин «перциркулянтная матрица» введен в [6], где имеется и алгоритм быстрого решения перциркулянтных систем.

Квадратную матрицу назовем **нейтральной**, если она состоит из суммы циркулянтной и перциркулянтной матриц. Рассмотрим нейтральную систему $Ax=f$, где $A=C+P$, C – циркулянтная, а P – перциркулянтная матрицы с первыми строками $\left(c_0,c_1,\ldots,c_{N-1}\right)$ и $\left(p_0,p_1,\ldots,p_{N-1}\right)$. Тогда из доказанных в диссертации утверждений следуют равенства:

$$F^*(C+P)F=\left[\begin{array}{c|cccccc}
\lambda_0+\mu_0 & & & & & & \\
\hline
 & \lambda_1 & & & & & \mu_1 \\
 & & \ddots & & & \iddots & \\
 & & & \lambda_M & \mu_M & & \\
 & & & \mu_{M+1} & \lambda_{M+1} & & \\
 & & \iddots & & & \ddots & \\
 & \mu_{2M} & & & & & \lambda_{2M}
\end{array}\right],$$

если $N=2M+1$;

$$F^*(C+P)F=\left[\begin{array}{c|ccccccc}
\lambda_0+\mu_0 & & & & & & & \\
\hline
 & \lambda_1 & & & & & & \mu_1 \\
 & & \ddots & & & & \iddots & \\
 & & & \lambda_{M-1} & & \mu_{M-1} & & \\
 & & & & \lambda_M+\mu_M & & & \\
 & & & \mu_{M+1} & & \lambda_{M+1} & & \\
 & & \iddots & & & & \ddots & \\
 & \mu_{2M-1} & & & & & & \lambda_{2M-1}
\end{array}\right],$$

если $N=2M$. В обеих матрицах ненулевые элементы расположены на двух диагоналях, которые обозначены многоточием, а все остальные элементы равны нулю. Для быстрого решения нейтральной системы $Ax=f$ рассмотрим две системы

$$F^*(C+P)Fy=F^*f \tag{16}$$

$$x=Fy. \tag{17}$$

Система (16) распадается на отдельные системы второго порядка и одно или два уравнения с одним неизвестным: если $N=2M+1$, то (16) распадается на одно уравнение с одним неизвестным $(\lambda_0+\mu_0)y_0=\left[F^*f\right]_0$ и M систем второго порядка:

$$\begin{cases} \lambda_k y_k \;+\; \mu_k y_{N-k} = \left[F^*f\right]_k, \\ \lambda_{N-k} y_k + \mu_{N-k} y_{N-k} = \left[F^*f\right]_{N-k}, \end{cases} \qquad k=1,\ldots,M;$$

если $N=2M$, то – на два уравнения, в каждом из которых одно неизвестное:

$$(\lambda_0+\mu_0)y_0=\left[F^*f\right]_0, \quad (\lambda_M+\mu_M)y_M=\left[F^*f\right]_M$$

и на $M-1$ систем второго порядка:

$$\begin{cases} \lambda_k y_k \;+\; \mu_k y_{N-k} = \left[F^*f\right]_k, \\ \lambda_{N-k} y_k + \mu_{N-k} y_{N-k} = \left[F^*f\right]_{N-k}, \end{cases} \qquad k=\overline{1,\, M-1}.$$

Здесь использованы обозначения:

$$y=\left(y_0,\, y_1, \ldots,\, y_{N-1}\right)^{\mathrm{T}} \quad \text{и} \quad F^*f=\left(\left[F^*f\right]_0, \left[F^*f\right]_1, \ldots, \left[F^*f\right]_{N-1}\right)^{\mathrm{T}}.$$

Следовательно, независимо от четности или нечетности N для решения системы (16) будет использовано $O\left(N\log_2 N\right)$ арифметических операций. Нахождение искомой неизвестной x из системы (17) использует такое же количество арифметических операций.

Если исследование разрешимости сингулярных интегральных уравнений Гильберта нейтрального типа первого рода $(Ax)(t)=f(t)$ вытекает из аналогичного исследования для уравнения второго рода $ax(t)+(Ax)(t)=f(t)$ при $a=0$, то положение коренным образом меняется при рассмотрении их дискретных аналогов. В § 3.10 и § 3.12 наряду с интегральными уравнениями (8) и (9) рассматриваются их дискретные аналоги

$$A_N x_N = f_N \quad \text{и} \quad A_N^{(a)} x_N^{(a)} = f_N^{(a)},$$

где $A_N:\mathbb{C}^N\to\mathbb{C}^N$, $A_N^{(a)}:\mathbb{C}^{2N}\to\mathbb{C}^{2N}$ – дискретные операторы, определяемые квадратными матрицами порядка N и $2N$, а $f_N\in\mathbb{C}^N$, $f_N^{(a)}\in\mathbb{C}^{2N}$, $x_N\in\mathbb{C}^N$, $x_N^{(a)}\in\mathbb{C}^{2N}$ – заданные и искомые векторы, которые определяются интегральными операторами A, $aE+A$, функцией $f(t)$ на заданных на отрезке $[0,\,2\pi]$ сетках:

$$\{s;N\}=\left\{s_{m,N}=s_{0,N}+mh_N : m=1,\ldots,N\right\}, \quad \{t;N\}=\left\{t_{m,N}=t_{0,N}+mh_N : m=1,\ldots,N\right\},$$

$h_N = 2\pi / N$; $s_{0,N} \in \left[-h_N, -0{,}5h_N\right]$, $t_{0,N} = s_{0,N} + 0{,}5h_N$ – нулевые узлы. Следуя И. К. Лифанову, множество узлов сеток $\{s;N\}$ и $\{t;N\}$ назовём каноническим разбиением отрезка $[0,\, 2\pi]$. Операторы, ставящие на сетках $\{s;N\}$ и $\{t;N\}$ каждой $x(t) \in H^{\alpha}$ сеточные функции, обозначим $\Phi_{\{s;N\}}$ и $\Phi_{\{t;N\}}$:

$$\Phi_{\{s;N\}} x = \left(x\left(s_{1,N}\right),\, x\left(s_{2,N}\right),\ldots,x\left(s_{N,N}\right)\right)^{\mathrm{T}},\ \Phi_{\{t;N\}} x = \left(x\left(t_{1,N}\right),\, x\left(t_{2,N}\right),\ldots,x\left(t_{N,N}\right)\right)^{\mathrm{T}}.$$

Дискретный аналог A_N, соответствующий сингулярному оператору интегральному оператору Гильберта нейтрального типа A, определим равенством $A_N = T_N + K_{1,N} + K_{2,N}$, где T_N и $K_{1,N}$ – циркулянтные матрицы с первыми строками

$$q_N^{\mathrm{T}} = \left[\frac{1}{N}\operatorname{ctg}\frac{\xi_{0,N}^{(-)}}{2} \quad \ldots \quad \frac{1}{N}\operatorname{ctg}\frac{\xi_{N-1,N}^{(-)}}{2}\right],\ q_{1,N}^{\mathrm{T}} = \left[\frac{1}{N}k_1\left(\xi_{0,N}^{(-)}\right) \quad \ldots \quad \frac{1}{N}k_1\left(\xi_{N-1,N}^{(-)}\right)\right],$$

а $K_{2,N}$ – перциркулянтная матрица с первой строкой

$$q_{2,N}^{\mathrm{T}} = \left[\frac{1}{N}k_2\left(\xi_{0,N}^{(+)}\right) \quad \ldots \quad \frac{1}{N}k_2\left(\xi_{N-1,N}^{(+)}\right)\right],$$

где $\xi_{m,N}^{(-)} = t_{1,N} - s_{m+1,N}$, $\xi_{m,N}^{(+)} = t_{1,N} + s_{m+1,N}$, $m = 0,1,\ldots,N-1$. Доказана оценка аппроксимации

$$\left\|\Phi_{\{t;N\}} A - A_N \Phi_{\{s;N\}}\right\|_{L_{2,N}} = O\left(N^{-\alpha} \ln N\right),$$

где $\| A\|_{L_{2,N}} = \sup\limits_{\| y\|_{L_{2,N}}=1} \| Ay\|_{L_{2,N}}$, $\| y\|_{L_{2,N}} = \sqrt{\dfrac{1}{N}\sum\limits_{m=1}^{N}\left|y_m\right|^2}$.

Структура матрицы, полученная дискретным преобразованием Фурье над матрицей A_N, доказывается в следующем утверждении:

Теорема 16. ***Для любого*** $N \ge 2M+1$***, где*** M ***– старшая степень тригонометрических полиномов*** $k_1(t)$ ***и*** $k_2(t)$***, справедливо равенство***

$$F_N^* A_N F_N = \begin{bmatrix} b_0 + c_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{1,1} + K_{1,1}^{(-)} & 0 & K_{1,3}^{(+)} \\ 0 & 0 & \Lambda_{2,2} & 0 \\ 0 & K_{3,1}^{(+)} & 0 & \Lambda_{3,3} + K_{3,3}^{(-)} \end{bmatrix},$$

где $N = 2M + M_0 + 1$***,*** $\chi = e^{i\frac{\pi}{N}}$***,*** $\omega = e^{i\gamma_N}$***,*** $\gamma_N = 2s_{0,N} + 2{,}5h_N$***,***

$$\begin{cases}\Lambda_{1,1}=\operatorname{diag}\left(\lambda_1,\ \dots,\ \lambda_M\right),\\ \Lambda_{2,2}=\operatorname{diag}\left(\lambda_{M+1},\ \dots,\ \lambda_{M+M_0}\right),\\ \Lambda_{3,3}=\operatorname{diag}\left(\lambda_{M+M_0+1},\ \dots,\ \lambda_{M+M_0+M}\right),\end{cases}\quad \boldsymbol{,}\ \ \lambda_0=0;\ \lambda_k=e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{k\pi}{N}\right)},\ k=1,\dots,N-1\boldsymbol{;}$$

$$K_{1,1}^{(-)}=\begin{bmatrix} b_{-1}\bar{\chi} & & \\ & \ddots & \\ & & b_{-M}\bar{\chi}^M\end{bmatrix},\quad K_{3,3}^{(-)}=\begin{bmatrix} b_M\chi^M & & \\ & \ddots & \\ & & b_1\chi\end{bmatrix};$$

$$K_{1,3}^{(+)}=\begin{bmatrix} & & c_{-1}\bar{\omega} \\ & \iddots & \\ c_{-M}\bar{\omega}^M & & \end{bmatrix},\quad K_{3,1}^{(+)}=\begin{bmatrix} & & c_M\omega^M \\ & \iddots & \\ c_1\omega & & \end{bmatrix};$$

а $b_k,\ c_k,\ k=0,\pm1,\dots,\pm M$ ***– коэффициенты функций*** $k_1(t)$ ***и*** $k_2(t)$**.**

Приведенная структура матрицы, позволяет представить систему $F_N^*A_NF_Ny_N=g_N$, $\left(y_N=F_N^*x_N, g_N=F_N^*f_N\right)$ как отдельные уравнения с одним неизвестным и отдельные системы второго порядка с двумя неизвестными:

$$\left(b_0+c_0\right)\left(y_N\right)_0=\left(g_N\right)_0,\ \ (k=0), \tag{18}$$

$$\lambda_k\left(y_N\right)_k=\left(g_N\right)_k,\ \ \left(k=M+1,\dots,M+M_0\right), \tag{19}$$

$$\begin{cases}\left(\lambda_k+b_{-k}\bar{\chi}^k\right)\left(y_N\right)_k+c_{-k}\bar{\omega}^k\left(y_N\right)_{N-k}=\left(g_N\right)_k,\\ c_k\omega^k\left(y_N\right)_k+\left(\lambda_{N-k}+b_k\chi^k\right)\left(y_N\right)_{N-k}=\left(g_N\right)_{N-k},\end{cases} \tag{20}$$

$$(k=1,\dots,M),$$

где $\left(y_N\right)_k$ и $\left(g_N\right)_k$ – обозначения k-х координат векторов y_N и g_N.

Приведём пошаговый алгоритм быстрого решения этой системы, основанный на методе Фурье.

Шаг 1. Вычисляем матричные умножения $F_N^*T_NF_N$, $F_N^*K_{1,N}F_N$ и $F_N^*K_{2,N}F_N$; для этого достаточно вычислить F_Nq_N, $F_Nq_{1,N}$ и $F_Nq_{2,N}$; в нашем случае эти вычисления не будут проведены, так как эти матрицы вычислены точно; сумма матриц $F_N^*T_NF_N$, $F_N^*K_{1,N}F_N$ и $F_N^*K_{2,N}F_N$ определяет матрицу системы и требует выполнение $2N$ операции сложения (здесь и всюду ниже все арифметические операции проводятся над комплексными числами).

Шаг 2. Вычисляем вектор $g_N=F_N^*f_N$;

Шаг 3. Решаем одно уравнение (18) и M_0 уравнений (19); после чего будут определены $\left(y_N\right)_0$ и $\left(y_N\right)_k$, $k=M+1,\dots,M+M_0$; решаем M систем второго порядка (20), определители которых не равны нулю; после чего будут определены неизвестные $\left(y_N\right)_k$, $k=1,\ldots,M$ и $k=M+M_0+1,\ldots,2M+M_0$.

Шаг 4. Вычисляем вектор $x_N = F_N y_N$.

Затраты, требующие для осуществления указанных действий, приводим в следующей таблице,

Номер шага	Количество арифметических операций
Шаг 1	$O(N)$
Шаг 2	$O\left(N\log_2 N\right)$
Шаг 3	$O(N)$
Шаг 4	$O\left(N\log_2 N\right)$
Всего:	$O\left(N\log_2 N\right)$

В § 3.11 и § 3.13 доказаны теоремы сходимости решений дискретных уравнений I и II рода к решениям соответствующих интегральных уравнений. (Формулировки теорем приводятся с некоторыми сокращениями.)

Теорема 17. ***Пусть выполнены условия теоремы* 12. *Тогда для всех*** $f\in H^{\alpha}$ ***система*** $A_N x_N = f_N$ ***имеет единственное решение*** $x_N = A_N^{-1} f_N$ ***и справедлива оценка***

$$\left\| A_N^{-1} f_N - \Phi_{\{s;N\}} A^{-1} f \right\|_{L_{2,N}} = O\left(N^{-\alpha}\ln N\right).$$

Доказаны аналогичные теоремы, соответствующие и теоремам 13 – 15.

Дискретная система, соответствующая интегральному уравнению второго рода имеет вид

$$\begin{cases} a x_N' + A_N x_N = f_N, \\ A_N' x_N' + a x_N = f_N'. \end{cases} \tag{21}$$

где A_N' – матрица, аналогичная A_N и получается из неё путем замены сеток $\{s;\,N\}$ и $\{t;\,N\}$. Положим

$$F(t,s) = \begin{bmatrix} f(t) \\ f(s) \end{bmatrix}, \qquad F_N \equiv \Phi^{\{t;\,N\}}_{\{s;\,N\}} F = \begin{bmatrix} \Phi_{\{t;\,N\}} f \\ \Phi_{\{s;\,N\}} f \end{bmatrix},$$

$$X(t,s) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(s) \end{bmatrix}, \qquad X_N \equiv \Phi^{\{t;\,N\}}_{\{s;\,N\}} X = \begin{bmatrix} \Phi_{\{t;\,N\}} x \\ \Phi_{\{s;\,N\}} x \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{A}X = \begin{bmatrix} a x(t) + (Ax)(t) \\ a x(s) + (Ax)(s) \end{bmatrix}.$$

Тогда уравнение второго рода и систему (21) можно записать:

$$\mathbb{A}X = F, \tag{22}$$
$$\mathbb{A}_N X_N = F_N. \tag{23}$$

Теорема 18. ***Для однозначной разрешимости уравнения* (22) *для любой функции*** $f \in HL$***, необходимо и достаточно, чтобы следующие числа были ненулевыми:***

$$\begin{cases} \lambda_1 = a + b_0 + c_0,\ \lambda_{1,2} = \dfrac{1}{2}\left(2a + b_{-n} + b_n \pm \sqrt{\left(b_{-n} - b_n + i2\right)^2 + 4c_{-n}c_n}\right), \\ \lambda_2 = a - b_0 - c_0,\ \lambda_{3,4} = \dfrac{1}{2}\left(2a - b_{-n} - b_n \pm \sqrt{\left(b_{-n} - b_n + i2\right)^2 + 4c_{-n}c_n}\right). \end{cases} \tag{24}$$

Теорема 19. ***Пусть числа* (24) *не равны нулю. Тогда*** $\forall f \in H^{\alpha}$***, система* (23) *имеет единственное решение*** $X_N = \mathbb{A}_N^{-1} F_N$***, и справедлива оценка***

$$\left\| \mathbb{A}_N^{-1} F_N - \Phi_{\{t;\,N\}}^{\{s;\,N\}} \mathbb{A}^{-1} F \right\|_{L_{2,2N}} = O\left(N^{-\alpha} \ln N\right).$$

В § 3.14 приводится общая схема решения дискретных уравнений на примере решения абстрактного уравнения.

В **ЧЕТВЕРТОЙ ГЛАВЕ** метод регуляризации сдвигом применяется для нахождения периодических решений систем линейных дифференциальных уравнений и в регулярном, и в резонансном случаях:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t), \qquad 0 \le t \le 2\pi, \tag{25}$$

где A – постоянная квадратная матрица порядка N, $f(t) \in \overline{C}_N$ – заданная вектор-функция, $\overline{C}_N = \overline{C}_N[0, 2\pi]$ – пространство непрерывных 2π-периодических вектор-функций. **Регулярным** называется случай, когда у матрицы A отсутствует целое чисто мнимое собственное значение, а **резонансным** – в противном случае. Условие 2π-периодичности решения записывается СЛАУ

$$\left(E - e^{2\pi A}\right)x(0) = e^{2\pi A} \int_0^{2\pi} e^{-sA} f(s)\,ds. \tag{26}$$

В регулярном случае матрица $E - e^{2\pi A}$ – невырожденная $\det\left(E - e^{2\pi A}\right) \ne 0$ и, следовательно, СЛАУ (26) однозначно разрешима для $\forall f(t) \in \overline{C}_N$.

В резонансном случае матрица $E - e^{2\pi A}$ – вырожденная $\det\left(E - e^{2\pi A}\right) = 0$ и, следовательно, СЛАУ (26) разрешима не для всякой правой части $f(t) \in \overline{C}_N$, а в случаи совместности она имеет бесчисленно много решений. Для преодоления этой ситуации рассматривается регуляризация сдвигом СЛАУ (26)

$$\frac{dx}{dt} = (A + \alpha B)x + f(t), \qquad 0 \le t \le 2\pi, \tag{27}$$

где B – постоянная квадратная матрица порядка N, а α – произвольное комплексное число – параметр регуляризации. Указан способ выбора матрицы B и доказана сходимость регуляризованных сдвигом решений (27) к решениям (25) как в регулярном, так и в резонансном случаях.

Жордановы блоки произвольной квадратной матрицы имеют один из следующих трех видов:

1) блоки, порядки которых равны единице; эти блоки соответствуют собственным значениям с алгебраической кратностью, равной единице (простые собственные значения);

2) блоки, порядки которых равны $m \geq 2$ и соответствующие им собственные подпространства являются m-мерными; эти блоки соответствуют собственным значениям, алгебраические и геометрические кратности которых совпадают и равны m (полупростые собственные значения);

3) блоки, порядки которых равны $m \geq 2$ и соответствующие им собственные подпространства являются одномерными; эти блоки соответствуют собственным значениям с алгебраической кратностью m и с геометрической кратностью 1.

В случае 1) имеем скалярное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = px + f(t), \qquad 0 \leq t \leq 2\pi, \tag{28}$$

где $p \in \mathbb{C}$ – произвольное. Регуляризацию сдвигом определяет скалярное уравнение вида

$$\frac{dx}{dt} = (p+\alpha)x + f(t), \tag{29}$$

Для однозначной разрешимости уравнения (28) в пространстве $\bar{C}_1$ необходимо и достаточно, чтобы p не равнялось целому чисто мнимому комплексному числу. Если p – целое чисто мнимое комплексное число, то необходимым и достаточным условием разрешимости (28) в $\bar{C}_1$, является выполнение равенства $\int\limits_0^{2\pi} e^{-ps} f(s)\,ds = 0$.

Для любого p найдется число $\rho(p) > 0$ такое, что при всех α, удовлетворяющих условию $0 < |\alpha| < \rho(p)$, выполняются неравенства $p + \alpha \neq ik$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, и единственным решением (29) в $\bar{C}_1$ является

$$x_\alpha(t) = \frac{e^{(p+\alpha)(t+2\pi)}}{1 - e^{2\pi(p+\alpha)}} \int\limits_0^{2\pi} e^{-(p+\alpha)s} f(s)\,ds + e^{(p+\alpha)t} \int\limits_0^{t} e^{-(p+\alpha)s} f(s)\,ds.$$

Доказаны оценки: а) $\|x_\alpha - x_0\|_{C[0,2\pi]} \leq m_0 |\alpha|$, если $\forall k \in \mathbb{Z},\ p \neq ik$;

б) $\|x_\alpha - x_{00}\|_{C[0,2\pi]} \leq m_{00} |\alpha|$, если $\exists k \in \mathbb{Z},\ p = ik$, где m_0 и m_{00} – некоторые постоянные, а

$$x_0(t)=\frac{e^{p(t+2\pi)}}{1-e^{2\pi p}}\int_0^{2\pi}e^{-ps}f(s)ds+e^{pt}\int_0^t e^{-ps}f(s)ds,$$

$$x_{00}(t)=\frac{e^{pt}}{2\pi}\int_0^{2\pi}se^{-ps}f(s)ds+e^{pt}\int_0^t e^{-ps}f(s)ds$$

– 2π-периодические решения уравнения (28).

В случае 2) имеем систему (25) с матрицей

$$A=\begin{bmatrix}p & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & p\end{bmatrix},\quad p=\mathrm{const};\quad A=A_{m\times m}.$$

Данная система распадается на m скалярных уравнений $\frac{dx_r}{dt}=px_r+f_r(t)$ и исследуется аналогично случаю 1). Доказана однозначная разрешимость и получена оценка скорости сходимости регуляризованных сдвигом решений к решению исходной системы.

В случае 3) имеем систему (25) с матрицей

$$A=\begin{bmatrix}p & & & 0\\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & p\end{bmatrix},\qquad p=\mathrm{const},\qquad A=A_{m\times m}.$$

Необходимым и достаточным условием однозначной разрешимости системы (25) для любой вектор-функции $f(t)\in\overline{C}_m$ в пространстве $\overline{C}_m$ является условие: $p\neq ik$, $\forall k\in\mathbb{Z}$. При этом единственное решение определяется так:

$$x_0(t)=\left(x_{1,0}(t),\ldots,x_{m,0}(t)\right)^{\mathrm{T}},$$

где

$$x_{k,0}(t)=\frac{e^{p(t+2\pi)}}{1-e^{2\pi p}}\int_0^{2\pi}e^{-ps}g_k(s)ds+e^{pt}\int_0^{2\pi}e^{-ps}g_k(s)ds,$$

$$g_k(t)=\begin{cases}f_k(t), & \text{если}\quad k=1,\\ f_k(t)+x_{k-1,0}(t), & \text{если}\quad k=2,\ldots,m.\end{cases}$$

Если $\exists k\in\mathbb{Z}$: $p=ik$, то необходимым и достаточным условием разрешимости (25) для данной функции $f(t)\in\overline{C}_m$ является условие $\int_0^{2\pi}e^{-ps}f_1(s)ds=0$. При выполнении этого условия система (25) имеет бесчисленно много решений в пространстве $\overline{C}_m$. Одним из таких решений является

$$x_{00}(t)=\left(x_{1,00}(t),\dots,x_{m,00}(t)\right)^{\mathrm{T}},$$

где

$$x_{k,00}(t)=\begin{cases}-\sum\limits_{l_1=0}^{k} I\left(l_1\right)+\sum\limits_{l_2=0}^{k-1} J\left(l_2\right), & \text{если} \quad k=1,\dots,m-1,\\ -\sum\limits_{l_1=1}^{k} I\left(l_1\right)+\sum\limits_{l_2=0}^{k-1} J\left(l_2\right), & \text{если} \quad k=m,\end{cases}$$

$$I\left(l_1\right)=\frac{1}{2\pi l_1!}\int\limits_0^{2\pi} e^{ik(t-s)}(\pi+t-s)^{l_1} f_{k+1-l_1}(s)ds,$$

$$J\left(l_2\right)=\frac{1}{l_2!}\int\limits_0^{t} e^{ik(t-s)}(t-s)^{l_2} f_{k+1-l_2}(s)ds.$$

Матрица B выбирается как

$$B=B_0=\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Для исследования системы, с выбранной матрицей B, использована идея, связанная с циркулянтной матрицей. А именно, квадратную матрицу

$$\Phi_\varepsilon=\frac{1}{\sqrt{m}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \varepsilon^{-1}w_0 & \varepsilon^{-1}w_1 & \dots & \varepsilon^{-1}w_{m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon^{-m+1}w_0^{m-1} & \varepsilon^{-m+1}w_1^{m-1} & \dots & \varepsilon^{-m+1}w_{m-1}^{m-1} \end{bmatrix},$$

назовём **обобщенной матрицей Фурье**. Заметим, что при $\varepsilon=1$ эта матрица совпадает с матрицей Фурье

$$F=\frac{1}{\sqrt{m}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ w_0 & w_1 & \dots & w_{m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_0^{m-1} & w_1^{m-1} & \dots & w_{m-1}^{m-1} \end{bmatrix},$$

приводящей все циркулянтные матрицы порядка m к диагональному виду. Матрица Φ_ε обратима для всех $\varepsilon\neq 0$, и справедливо равенство

$$\Phi_\varepsilon^{-1}=\frac{1}{\sqrt{m}}\begin{bmatrix} 1 & \varepsilon\bar{w}_0 & \dots & \varepsilon^{m-1}\bar{w}_0^{m-1} \\ 1 & \varepsilon\bar{w}_1 & \dots & \varepsilon^{m-1}\bar{w}_1^{m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \varepsilon\bar{w}_{m-1} & \dots & \varepsilon^{m-1}\bar{w}_{m-1}^{m-1} \end{bmatrix}.$$

Записав систему (29) при $B = B_0$ в виде

$$\frac{d\Phi_\varepsilon^{-1}x}{dt} = \Phi_\varepsilon^{-1}\left(A + \alpha B_0\right)\Phi_\varepsilon \cdot \Phi_\varepsilon^{-1}x + \Phi_\varepsilon^{-1} f(t)$$

и обозначив

$$y = \Phi_\varepsilon^{-1}x, \qquad y = \left(y_1, \dots, y_m\right)^{\mathrm{T}}, \quad g(t) = \Phi_\varepsilon^{-1} f(t), \qquad g(t) = \left(g_1(t), \dots, g_m(t)\right)^{\mathrm{T}},$$

вместо (27), получим систему, распадающуюся на отдельные уравнения

$$\frac{dy_k}{dt} = \left(p + \varepsilon \overline{w}_{k-1}\right) y_k + g_k(t), \quad k = 1, \dots, m, \ \varepsilon = \alpha^{1/m}.$$

Доказаны оценки скорости сходимости регуляризованных сдвигом решений к решению исходной системы.

В **ЗАКЛЮЧЕНИИ** подводятся итоги работы автора, определяются их теоретическое и практическое значение.

Основной задачей диссертационной работы является решение проблемы регуляризации сдвигом, а также приложения разработанной теории в исследовании прямых и двойственных задач L-псевдообращения, сингулярных интегральных уравнений Гильберта нейтрального типа и периодических систем линейных дифференциальных уравнений. В диссертации приведено решение поставленной задачи, как для систем линейных алгебраических уравнений, так и для абстрактных операторных уравнений, выявлены существенные особенности и различия решения поставленной проблемы в бесконечномерных случаях по сравнению с конечномерным.

Предложена методика, позволяющая получить и обосновать оптимальные оценки скорости сходимости метода регуляризации А. Н. Тихонова и решений вариационной задачи L-псевдообращения В. А. Морозова для нормально разрешимых задач с приближенными данными, в общем случае.

Выполнен полный анализ разрешимости сингулярных интегральных уравнений Гильберта нейтрального типа в различных пространствах. Установлена связь этих уравнений с бесконечными системами линейных алгебраических уравнений.

Получена новая методика решения дискретных задач, связанных с интегральными уравнениями Гильберта нейтрального типа и периодической задачи для систем линейных дифференциальных уравнений, основанная на методе регуляризации сдвигом.

Разработаны алгоритмы быстрого решения дискретных аналогов сингулярных интегральных уравнений Гильберта нейтрального типа, основанные на методе быстрого преобразования Фурье.

Отдельные результаты автора включены в учебные пособия, а также цитируются в монографиях и научных работах других авторов, занимающихся некорректными задачами линейной алгебры и анализа.

СПИСОК ОСНОВНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК:

1. *Назимов А. Б.. Муллоджанов М.* О разрешимости сингулярного интегрального уравнения Гильберта и его дискретного аналога // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2009. Т. 52, № 9. С. 674–680.

2. *Назимов А. Б., Морозов В. А.,Мухамадиев Э. М.* О свойствах классического и регуляризованного операторов Пуассона в пространствах Лебега // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2009. Т. 52, № 10. С. 743–748.

3. *Назимов А. Б., Морозов В. А., Мухамадиев Э. М.* О проблеме регуляризации сдвигом вырожденных систем линейных алгебраических уравнений // Доклады Российской Академии наук. 2008. Т. 419, № 4. С. 454–457.

4. *Назимов А. Б., Морозов В. А., Мухамадиев Э. М.* О проблеме регуляризации сдвигом вырожденных систем линейных алгебраических уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47, № 12. С. 1971–1978.

5. *Назимов А. Б., Морозов В. А., Мухамадиев Э. М.* Непрерывные и ограниченные гармонические функции на квадрате // Вычислительные методы и программирование. Новые вычислительные технологии. 2007. Том 8, 38–60 (http://num-meth.srcc.msu.ru/).

6. *Назимов А. Б., Лабиб Рашид.* Об условиях разрешимости линейных уравнений с фредгольмовым операторами // Доклады Академии наук Таджикской ССР. 1990. Т. 33, № 1. С. 13–16.

7. *Назимов А. Б, Мухамадиев Э. М.* О существовании и единственности решения сингулярного интегрального уравнения с ядром типа Гильберта и его приближенного решения // Доклады Академии наук Таджикской ССР. 1987. Т. 30, № 11. С. 512–515.

8. *Назимов А. Б., Морозов В. А.* О необходимости и достаточности условий регуляризуемости вырожденных систем линейных алгебраических уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1986. Т. 26, № 9.

9. *Назимов А. Б., Морозов В. А.* К проблеме регуляризации систем линейных алгебраических уравнений // Доклады Академии наук СССР. 1985. Т. 286, № 3.

10. *Назимов А. Б.* Метод БПФ для быстрого решения линейных систем с перциркулянтными блоками // Доклады Академии наук Таджикской ССР. 1985. Т. 28, № 6. С. 322–325.

11. *Назимов А. Б.* О трехэтапной лексикографической задаче и ее регуляризации // Доклады Академии наук Таджикской ССР. 1984. Т. 27, № 8. С. 377–380.

12. *Назимов А. Б., Джумаев С.* Об одном способе приближенного вычисления квазирешений // Доклады Академии наук Таджикской ССР. 1983. Т. 26, № 4. С. 195–198.

13. *Назимов А. Б.* О скорости сходимости метода регуляризации в гильбертовом пространстве // Доклады Академии наук Таджикской ССР. 1981. Т. 24, № 4. С. 211–214.

14. *Назимов А. Б.* О скорости сходимости метода регуляризации // Доклады Академии наук Таджикской ССР. 1979. Т. 22, № 10. С. 463–466.

Другие публикации:

15. *Назимов А. Б., Морозов В. А., Мухамадиев Э. М., Муллоджанов М.* Метод регуляризации сдвигом: Теория и приложения. Монография. Вологда: ВоГТУ, 2012. 368 с.

16. *Назимов А. Б., Морозов В. А., Мухамадиев Э. М.* О методе регуляризации сдвигом операторных уравнений в гильбертовом пространстве // Вопросы оптимизации вычислений. Киев: ИК НАН Украины, 2011. С. 125–126.

17. *Назимов А. Б., Морозов В. А., Мухамадиев Э. М.* Об аналоге ранговой матрицы для линейных операторов в бесконечномерных пространствах // Алгоритмический анализ неустойчивых задач. Екатеринбург: Уральский федеральный университет, 2011. С. 57–58.

18. *Назимов А. Б., Морозов В. А., Мухамадиев Э. М.* Классический и регуляризованный операторы Пуассона в пространствах непрерывных и ограниченных функций. Монография. Вологда: ВоГТУ, 2010. 148 с.

19. *Назимов А. Б., Морозов В. А., Мухамадиев Э. М.* О регуляризации сдвигом систем линейных алгебраических уравнений // Вопросы оптимизации вычислений. Т. 2. Киев: ИК НАН Украины, 2009. С. 105–107.

20. *Назимов А. Б.. Муллоджанов М.* О разрешимости сингулярного интегрального уравнения с ядром типа Гильберта // Вопросы оптимизации вычислений. Т. 2. Киев: ИК НАН Украины, 2009. С. 129–134.

21. *Назимов А. Б., Мухамадиев Э. М.* Сдвиг на одноранговую матрицу в задаче на собственные значения // Автоматизированная подготовка машино-

строительного производства, технология и надежность машин, приборов и оборудования. Вологда: ВоГТУ. 2005. С. 208–211.

22. *Назимов А. Б., Мухамадиев Э. М., Собиров М. К.* Обоснование метода регуляризации для решения линейных дифференциальных уравнений в пространстве почти периодических функций // Автоматизированная подготовка машиностроительного производства, технология и надежность машин, приборов и оборудования. Вологда: ВоГТУ. 2005. С. 223–227.

23. *Назимов А. Б.* О сходимости приближенного решения линейного дифференциального уравнения первого порядка // Дифференциальные уравнения и их приложения. Душанбе. 2000. С. 144–149.

24. *Назимов А. Б.* О спектре сингулярного интегрального оператора Гильберта и его дискретного аналога // Дифференциальные уравнения и их приложения. Душанбе. 2000. С. 150–155.

25. *Назимов А. Б.* Об одном критерии сходимости метода регуляризации сдвигом // Алгоритмический анализ некорректных задач. Екатеринбург. 1998.

26. *Назимов А. Б.* Быстрое решение систем линейных алгебраических уравнений с циркулянтными и перциркулянтными матрицами // Численные методы анализа. М.: МГУ. 1995.

27. *Назимов А. Б.* О применении метода быстрого преобразования Фурье при решении систем с циркулянтной и перциркулянтной матрицами // Исследование по теории дифференциальных, интегральных и операторных уравнений. Ленинабад. 1993. С. 83–94.

28. *Назимов А. Б., Собиров М. К.* О некоторых матричных оценках и равенствах // Материалы конференции молодых ученых Таджикистана. Курган-Тюбе, 1992. С. 133–134.

29. *Назимов А. Б., Муллоджанов М.* О разрешимости сингулярного интегрального уравнения с ядром Гильберта в гельдеровом пространстве // Конференция молодых ученых Таджикистана. Ленинабад. 1991. С. 83–85.

30. *Назимов А. Б.* Вопрос разрешимости сингулярного интегрального уравнения с ядром типа Гильберта и численные методы его решения // Депонировано в ВИНИТИ. 1989. № 4207–В89. 58 с.

31. *Назимов А. Б., Морозов В. А.* О приближенном решении одного класса неоднозначно разрешимых операторных уравнений // Вычислительные процессы и системы. М.: Наука, 1987.

32. *Назимов А. Б., Морозов В. А.* О приближенном решении одного класса неоднозначно разрешимых операторных уравнений // Электронное моделирование. 1986. Т. 8, № 6.

33. *Назимов А. Б., Морозов В. А.* К проблеме регуляризации систем линейных алгебраических уравнений // Численный анализ: Методы, алгоритмы, программы. М.: МГУ. 1985. С. 14–18.

34. *Назимов А. Б., Морозов В. А.* Специальная регуляризация линейных уравнений // Теория и методы решения некорректно поставленных задач и их приложения. Саратов.: Саратовский университет. 1985.

35. *Назимов А. Б.* О трехэтапной лексикографической задаче и ее регуляризации // Прикладные методы в численном анализе. М.: МГУ. 1985.

36. *Назимов А. Б.* Метод БПФ для численного решения сингулярных интегральных уравнений // Метод дискретных особенностей в задачах математической физики. Харьков: Харьковский университет. 1985. С. 77–79.

37. *Назимов А. Б.* Об одной специальной регуляризации решения операторных уравнений // Методы и алгоритмы в численном анализе. М.: МГУ. 1984. С. 54–63.

38. *Назимов А. Б.* Оптимальный порядок сходимости метода регуляризации // Теория и методы решения некорректно поставленных задач. Новосибирск: Новосибирский университет. 1983.

39. *Назимов А. Б., Морозов В. А.* К теории L-псевдообращения // Численный анализ: Методы, алгоритмы, программы. М.: МГУ. 1983. С. 20–29.

40. *Назимов А. Б.* Об одном специальном способе регуляризации систем линейных алгебраических уравнений // Методы и алгоритмы в численном анализе. М.: МГУ, 1982.