На правах рукописи

Исаева Анна Вячеславовна

РАЗВИТИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЕСТЕСТВЕННЫХ НЕФТЕГАЗОВЫХ СИСТЕМ

05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2013

Работа выполнена на кафедре компьютерных методов физики физического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель	кандидат физико-математических наук, доцент Сердобольская Мария Львовна
Официальные оппоненты:	Голубцов Петр Викторович, доктор физико-математических наук, доцент, кафедра математики физического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, профессор
	Тихоцкий Сергей Андреевич, доктор физико-математических наук, ФГБУН Институт физики Земли имени О. Ю. Шмидта Российской академии наук, директор
Ведущая организация	ФГБУН Институт проблем передачи информации имени А. А. Харкевича Российской академии наук

Защита состоится 14 июня 2013 года в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 501.002.09 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, г. Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 4, НИВЦ МГУ, большой конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке МГУ имени М. В. Ломоносова (Ломоносовский проспект, д. 27).

Автореферат разослан «   »   2013 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета   Суворов В. В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена изучению и развитию математических методов, лежащих в основе современных программных комплексов моделирования естественных нефтегазовых систем[1] и происходящих в них процессов. Центральным объектом исследований стали *методы и алгоритмы геостатистики.* Под геостатистикой понимают совокупность специальных вероятностных подходов к моделированию, анализу и обработке геолого-геофизических данных.

Экспансия методов теории вероятностей и математической статистики в область наук о Земле началась еще в первой половине XIX века[2]. По-настоящему широко и системно вероятностный аппарат стал внедряться в 1960-х гг. В этот период зародилась новая дисциплина – геостатистика. Теоретическую базу геостатистики впервые сформулировал в своих работах французский математик Ж. Матерон. Ему же принадлежит вероятностное обоснование метода *обыкновенного кригинга* – популярного метода построения оптимальных статистических оценок и интерполяции значений различных по физическому смыслу пространственных данных[3].

Рост популярности с 1960-х гг. математических методов в науках о Земле вообще и вероятностных подходов в частности был обусловлен стремительным прогрессом компьютерной техники. В конце 1970-х гг. появились первые коммерческие программные продукты, воплощающие основные прикладные наработки геостатистики[4].

В задачах математического моделирования естественных нефтегазовых систем компьютерные технологии начали использоваться еще раньше[5], в середине 1950-х гг. Постепенно вычислительный эксперимент стал основным способом априорной оценки технико-экономической эффективности различных технологий разработки нефтяных месторождений[6]. Методы геостатистики пришли в эту область как инструмент, позволивший ввести в математическую модель понятие *неопределенности параметров* модели[7]. Внедрение методов геостатистики инициировало процесс их адаптации и совершенствования, который продолжается и по сей день. Поэтому развитие методов геостатистики применительно к задачам математического моделирования естественных нефтегазовых систем представляет собой

[1] Под *естественными нефтегазовыми системами* мы понимаем нефтяные, газонефтяные, нефтегазовые, газоконденсатные залежи и т. п. (см. определения понятий: *Основы разработки шельфовых нефтегазовых месторождений и строительство морских сооружений в Арктике* / А. Б. Золотухин, О. Т. Гудместад, А. И. Ермаков и др. М.: Изд-во «Нефть и газ» РГУНГ им. И. М. Губкина, 2000).

[2] *Fisher, R. A.* The Expansion of Statistics // Jour. Royal Stat. Soc. 1953. A 116. p. 1–6.

[3] *Cressie, N.* Statistics for Spatial Data. New York: Wiley, 1993.

[4] *Dubrule, O.* Geostatistics in Petroleum Geology. Tulsa: Amer. Assn. of Petrol. Geologists, 1998.

[5] *Peaceman, D. W.* A Personal Retrospection of Reservoir Simulation // A History of Scientific Computing / Edit. S. G. Nash. New York: ACM Press, 1990. p. 106–129.

[6] *Watts, J. W.* Reservoir Simulation: Past, Present and Future // SPE Computer Applications. 1997. 9(6). p. 171–176.

[7] *Deutsch, C. V.* Geostatistical reservoir modeling. Oxford: Univ. Press, 2002.

актуальную проблему.

Цель работы состояла в развитии аппарата методов геостатистики и применении их в задачах математического моделирования естественных нефтегазовых систем, а именно, предполагалось:

– создание новых математических методов и вычислительных алгоритмов анализа и интерпретации данных геофизических исследований скважин для прогноза геолого-геофизических параметров;
– создание новых методов математического моделирования, вычислительных алгоритмов и комплексов программ для изучения процесса вытеснения нефти водой в неоднородных пористых средах.

В диссертационной работе рассматривались две **основные задачи.**

1. Построение наилучших в среднем квадратичном несмещенных оценок значения случайной функции по данным наблюдений применительно к прогнозу геолого-геофизических параметров с учетом априорных представлений о типичной структуре естественных нефтегазовых систем.
2. Исследование математической модели процесса нефтеизвлечения, содержащей случайные параметры, и компьютерное моделирование процесса вытеснения нефти водой в неоднородной пористой среде.

Первая задача подразумевала формулировку новых разновидностей метода кригинга, причем таких разновидностей, которые были бы полезны при прогнозировании значений геолого-геофизических параметров естественных нефтегазовых систем. Для решения задачи было введено понятие *локально стационарной случайной функции.* В классе локально стационарных случайных функций были получены выражения для наилучшей в среднем квадратичном несмещенной линейной оценки значения случайной функции по данным наблюдений (модификация метода кригинга). Предложенная модификация метода кригинга тестировалась в вычислительном эксперименте, а также была использована для прогноза значений коэффициента пористости по данным геофизических исследований скважин реального нефтяного месторождения. Для сопоставления геологических разрезов скважин по профилям пористости были впервые использованы морфологические методы анализа сигналов и изображений.

В рамках решения второй задачи была рассмотрена простейшая математическая модель, описывающая процесс вытеснения нефти водой в неоднородной пористой среде – начально-краевая задача для уравнения Бакли–Леверетта. В работе предполагалось, что уравнение Бакли–Леверетта содержит случайный параметр (коэффициент пористости представлял собой случайную функцию координаты). В такой постановке удалось получить явное выражение для стохастических характеристик уравнения Бакли–Леверетта, а также сформулировать алгоритм построения приближенных решений рассматриваемой начально-краевой задачи, сколь угодно близких к ее точному решению. С помощью данного алгоритма в вычислительном эксперименте изучались численные методы (метод *ориентированных против потока разностных схем* и *гибридный метод* Федоренко) решения начально-краевых задач для нелинейных гиперболических уравнений.

В диссертации были получены следующие **основные результаты**:

1. Разработаны новые методы и вычислительные алгоритмы, применимые в задачах математического моделирования естественных нефтегазовых систем: модификация метода построения оптимальных статистических оценок и интерполяции пространственных данных (метода кригинга), опирающаяся на введенное в работе понятие локально стационарной случайной функции, и морфологический алгоритм сопоставления геологических разрезов скважин по данным геофизических исследований.
2. Предложены приближенные аналитические методы и вычислительные алгоритмы решения начально-краевой задачи для уравнения Бакли–Леверетта со случайным параметром; получены статистические оценки параметров процесса вытеснения нефти водой в неоднородной пористой среде.
3. Создан многофункциональный комплекс программ, реализующий предложенные в работе методы и вычислительные алгоритмы математического моделирования естественных нефтегазовых систем, работы с данными геофизических исследований скважин, решения нелинейных гиперболических уравнений, статистического моделирования случайных коррелированных полей.

Научная новизна полученных в диссертационной работе результатов заключается в следующем:

- введено понятие локально стационарной случайной функции;
- предложена модификация метода кригинга для класса локально стационарных случайных функций;
- предложен морфологический алгоритм сопоставления геологических разрезов скважин по данным геофизических исследований;
- получены стохастические характеристики уравнения Бакли–Леверетта, содержащего случайный параметр;
- сформулирован алгоритм построения приближенных решений начально-краевой задачи для уравнения Бакли–Леверетта, сколь угодно близких к ее точному решению;
- разработан комплекс программ, реализующий предложенную в диссертации модификацию метода кригинга, морфологический алгоритм, методы решения нелинейных гиперболических уравнений, алгоритмы компьютерного моделирования случайных полей.

Практическая значимость. Результаты диссертации могут быть использованы в задачах прогноза значений геолого-геофизических параметров, анализа и интерпретации данных геофизических исследований скважин, построения численных решений нелинейных гиперболических уравнений, интерпретации результатов лабораторных экспериментов по фильтрации на кернах.

Апробация. Основные результаты диссертационной работы были представлены на 16-й и 18-й Международных конференциях «Математика. Компьютер. Образование» (Пущино, 2009, 2011), XVI, XVIII и XIX Международных конференциях студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (Москва, 2009, 2011, 2012), семинаре кафедры волновой и газовой динамики механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова (15.09.2010), семинаре лаборатории физикохимии модифицированных поверхностей ИФХЭ РАН (14.09.2012), семинаре «Обратные задачи математической физики» НИВЦ МГУ имени М. В. Ломоносова (26.09.2012), семинаре лаборатории структурных методов анализа данных в предсказательном моделировании и оптимизации МФТИ (16.10.2012), семинаре лаборатории сейсмических методов исследования геофизической среды ИФЗ РАН (29.10.2012), научно-методологическом семинаре НИВЦ МГУ (13.12.2012).

Публикации. По теме диссертационной работы опубликовано девять работ, в том числе четыре статьи в журналах из списка ВАК. Список публикаций приведен в конце автореферата.

Структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и пяти приложений. Общий объем диссертации составляет 111 стр., в том числе 26 рисунков и 3 таблицы, список цитируемой литературы включает 121 наименование.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **Введении** кратко охарактеризованы основные подходы, принятые в задачах математического моделирования естественных нефтегазовых систем. Обоснована актуальность темы исследований, сформулированы цели работы. Дано краткое описание решаемых в работе задач, используемых методов и основных результатов диссертации.

Первая глава посвящена теоретическим основам геостатистики в формулировке Ж. Матерона[8]. Согласно его представлениям изучаемые параметры реальных (геологических) объектов следует интерпретировать как реализации значений некоторых случайных функций[9] $\xi(\mathbf{x})$, где переменная $\mathbf{x} \in X$ по физическому смыслу обычно совпадает с пространственной координатой.

Основная задача классической геостатистики – это задача построения *оптимальной оценки* Y^* значения случайной функции в точке $\mathbf{x}$ по данным наблюдений, т. е. задача поиска наилучшей в среднем квадратичном

[8] *Матерон Ж.* Основы прикладной геостатистики. М: Мир, 1968.

[9] Под *случайной функцией* мы понимаем измеримую функцию $\xi(\cdot): X \times \Omega \to \mathbb{R}^1$, где $X \subset \mathbb{R}^N$, Ω – пространство элементарных событий, на σ-алгебре которого задана вероятностная мера. Далее, как это принято, в аргументе случайной функции будем опускать зависимость от случайного исхода – элемента Ω.

несмещенной оценки для $\xi(\mathbf{x})$ по известным реализациям значений случайной функции в точках $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in X$:

$$\begin{cases} Y^* = \arg\left\{\inf_{Y\in\mathfrak{Y}} \mathrm{E}\left(\xi(\mathbf{x}) - Y\right)^2\right\}, \\ \mathrm{E}\left(\xi(\mathbf{x}) - Y^*\right) = 0, \end{cases} \qquad (1)$$

где $\mathfrak{Y} = \{Y\left(\xi(\mathbf{x}_1), \ldots, \xi(\mathbf{x}_n)\right)\}$ – заданный класс оценок.

В геостатистике задачу (1), как правило, рассматривают для класса линейных оценок. При этом вводят различные ограничения на допустимые свойства случайных функций. В такой постановке получают решения задачи (1) – явные выражения для оптимальных оценок Y^*. Процедуру получения решений задачи (1) в заданных классах оценок для выбранных типов случайных функций в геостатистике называют *кригингом.* К примеру, для линейного класса оценок $\mathfrak{Y}_L = \left\{Y = b + \sum_{i=1}^{n} a_i\, \xi(\mathbf{x}_i),\ b, a_i \in \mathbb{R}^1\right\}$ и слабо стационарных случайных функций ($\mathrm{E}\,\xi(\mathbf{x}) = m$, $\operatorname{cov}\left(\xi(\mathbf{x}), \xi(\mathbf{x}')\right) = K(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$, $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in X$) решение задачи (1) имеет вид

$$\begin{cases} Y^* = b^* + \sum_{i=1}^{n} a_i^*\, \xi(\mathbf{x}_i), \\ b^* = m\left(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i^*\right), \\ a_i^* :\ \sum_{j=1}^{n} a_j^* K(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) = K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i), \quad i = \overline{1, n}. \end{cases} \qquad (2)$$

Если оценка $Y \in \mathfrak{Y}_L$ удовлетворяет условиям (2), то говорят, что Y реализует *простой кригинг* величины $\xi(\mathbf{x})$.

Другая, по-видимому, наиболее известная разновидность метода кригинга была получена Ж. Матероном. Он рассмотрел случайные функции, удовлетворяющие *внутренней гипотезе*: $\mathrm{E}\left(\xi(\mathbf{x}) - \xi(\mathbf{x}')\right) = 0$, $E\left(\xi(\mathbf{x}) - \xi(\mathbf{x}')\right)^2 = V(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$, $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in X$. Для таких случайных функций оптимальная в классе $\mathfrak{Y}_C = \left\{Y = \sum_{i=1}^{n} c_i\, \xi(\mathbf{x}_i),\ \sum_{i=1}^{n} c_i = 1,\ c_i \in \mathbb{R}^1\right\}$ оценка Y^* – решение задачи (1) – может быть получена из соотношений

$$\begin{cases} Y^* = \sum_{i=1}^{n} c_i^*\, \xi(\mathbf{x}_i), \\ c_i^* = \sum_{j=1}^{n} U_{i,j} V(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) + \\ \qquad + \left(\sum_{j=1}^{n} U_{i,j}\right)\left(1 - \sum_{k,l=1}^{n} U_{k,l} V(\mathbf{x} - \mathbf{x}_l)\right) \Big/ \sum_{k,l=1}^{n} U_{k,l}, \end{cases} \qquad (3)$$

где $U_{i,j}$ – элементы матрицы, обратной к матрице V: $V_{i,j} = V(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$, $i, j = \overline{1, n}$. Говорят, что Y^* из (3) реализует *обыкновенный кригинг* величины $\xi(\mathbf{x})$.

Выписанные разновидности метода кригинга (2) и (3) задают алгоритм получения оптимальной оценки Y^* значения $\xi(\mathbf{x})$ по выборке $\xi(\mathbf{x}_1), \ldots, \xi(\mathbf{x}_n)$. В случае (2) для построения Y^* необходимы значения автокорреляционной функции $K(\cdot)$, в случае (3) – вариограммы $V(\cdot)$. На практике оценки $K(\cdot)$ и $V(\cdot)$ могут быть получены методом *вариограммного анализа*, основные понятия и приемы которого освещены в первой главе диссертационной работы.

На сегодняшний день известен целый ряд разновидностей метода кригинга[10]. Модификации метода кригинга различаются вводимыми ограничениями, сужающими рассматриваемый класс случайных функций (в роли таких ограничений в (2) и (3) выступили слабая стационарность случайной функции и внутренняя гипотеза соответственно). На практике, как правило, используют такие модификации метода кригинга, которые лучше согласуются с априорными представлениями о структуре данных в конкретной задаче. Применительно к вопросам математического моделирования естественных нефтегазовых систем интерес представляет создание новых разновидностей метода кригинга, которые отражали бы наиболее общие представления о типичной структуре нефтяных месторождений. Такая задача рассматривалась во второй главе диссертационной работы.

Во **второй главе** предложена новая модификация метода кригинга, опирающаяся на введенное в диссертации понятие локальной стационарности случайной функции.

Определение 1 *Назовем случайную функцию* $\xi(\cdot)$ ***локально стационарной*** *в области* X*, если существует такое разбиение* X *на* $T<\infty$ *непересекающихся подобластей* $X_i : \bigcup_{i=1}^{T} X_i = X$*,* $X_i \bigcap_{i\neq j} X_j = \varnothing$*, что*

1) *в каждой подобласти* X_i *случайная функция удовлетворяет условию слабой стационарности:* $\mathrm{E}\,\xi(\mathbf{x}) = m_i$, $\operatorname{cov}(\xi(\mathbf{x}), \xi(\mathbf{x}')) = K_i(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$ *для всех* $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in X_i$*;*
2) *значения случайной функции в различных* X_i *не коррелируют, т. е.* $\operatorname{cov}(\xi(\mathbf{x}), \xi(\mathbf{x}')) = 0$, $\mathbf{x} \in X_i$*,* $\mathbf{x}' \in X_j$*,* $i \neq j$*.*

Для локально стационарной случайной функции был сформулирован аналог метода кригинга. Полученные результаты обобщает следующая теорема.

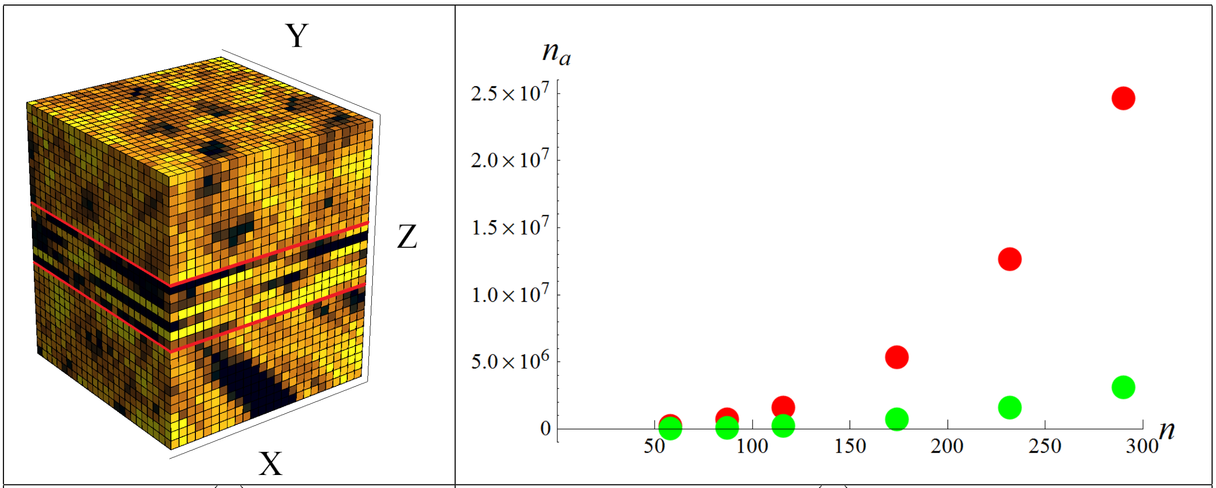
Теорема 1 *Для локально стационарной в смысле определения* 1 *случайной функции, значения которой, кроме того, являются стохастически линейно независимыми*[11] *в любой подобласти стационарности* X_i*,* $i = \overline{1,T}$*, наилучшая в среднем квадратичном несмещенная линейная оценка значения* $\xi(\mathbf{x})$ *в точке* $\mathbf{x} \in X_q$ *по известным значениям этой случайной функции в точках* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in X$ *определяется выражениями*

$$\begin{aligned} &Y^* = m_q + \sum\nolimits_{i:\ \mathbf{x}_i \in X_q} a_i^* \left(\xi(\mathbf{x}_i) - m_q\right), \\ &a_i^* : \sum\nolimits_{j:\ \mathbf{x}_j \in X_q} a_j^* K_q(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) = K_q(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i),\ i : \mathbf{x}_i \in X_q. \end{aligned} \tag{4}$$

Из теоремы 1, в частности, вытекает, что для построения оптимальной оценки Y^* значения $\xi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in X_q$, мы можем ограничиться подмножеством

[10] К примеру, универсальный кригинг, ко-кригинг, блочный кригинг, индикаторный кригинг, байесов кригинг и другие методы.

[11] Мы называем *стохастически линейно независимыми* случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_m$, если из равенства $c_0 + c_1\xi_1 + \ldots + c_m\xi_m = 0$, имеющего место в вероятностью единица, вытекает $c_i = 0$, $i = \overline{0,m}$, здесь $c_i \in \mathbb{R}^1$ – неслучайные числовые коэффициенты.



(а) (б)

Рис. 1: **Вычислительная сложность модификации метода кригинга и стандартной процедуры кригинга (результаты компьютерного эксперимента).**

всех выборочных значений локально стационарной случайной функции, которые относятся к области X_q. Это приводит к уменьшению вычислительных затрат на построение Y^*.

Вычислительная сложность предложенной модификации метода кригинга изучалась в компьютерном эксперименте на модели локально стационарных случайных данных ($T = 3$), показанной на рис. 1(а). Требовалось оценить количество арифметических операций, необходимое для решения относительно a_i^* системы линейных алгебраический уравнений в (4). Аналогичная оценка количества арифметических операций производилась для обобщенного метода кригинга[12]. Рис. 1(б) показывает экспериментальные оценки вычислительной сложности двух указанных подходов: точки соответствуют затраченному количеству арифметических операций в зависимости от размера данных наблюдений n (красным цветом – для стандартного обобщенного метода кригинга, зеленым цветом – для предложенной модификации метода). Видно, что применение модифицированного подхода снижает вычислительные затраты.

Предположение локальной стационарности случайной функции хорошо согласуется с представлениями о типичной структуре нефтяных месторождений: часто месторождения имеют слоистую структуру, в одном слое геолого-геофизические параметры в среднем схожи, в различных слоях заметно отличаются. В диссертации модифицированный на основе понятия локальной стационарности метод кригинга использовался в задаче прогноза значений коэффициента пористости по данным геофизических исследований скважин реального месторождения нефти[13].

[12] Под обобщенным методом кригинга мы понимаем алгоритм получения решений Y^* задачи (1), сводящийся к следующим выражениям:

$$\begin{cases} Y^* = \mathrm{E}\,\xi(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{n} a_i^* \left(\xi(\mathbf{x}_i) - \mathrm{E}\,\xi(\mathbf{x}_i)\right), \\ a_i^* : \sum_{j=1}^{n} a_j^* \operatorname{cov}(\xi(\mathbf{x}_i), \xi(\mathbf{x}_j)) = \operatorname{cov}(\xi(\mathbf{x}), \xi(\mathbf{x}_i)), \quad i = \overline{1, n}. \end{cases}$$

[13] Рассматривалась терригенная залежь, расположенная на южном шельфе Вьетнама.

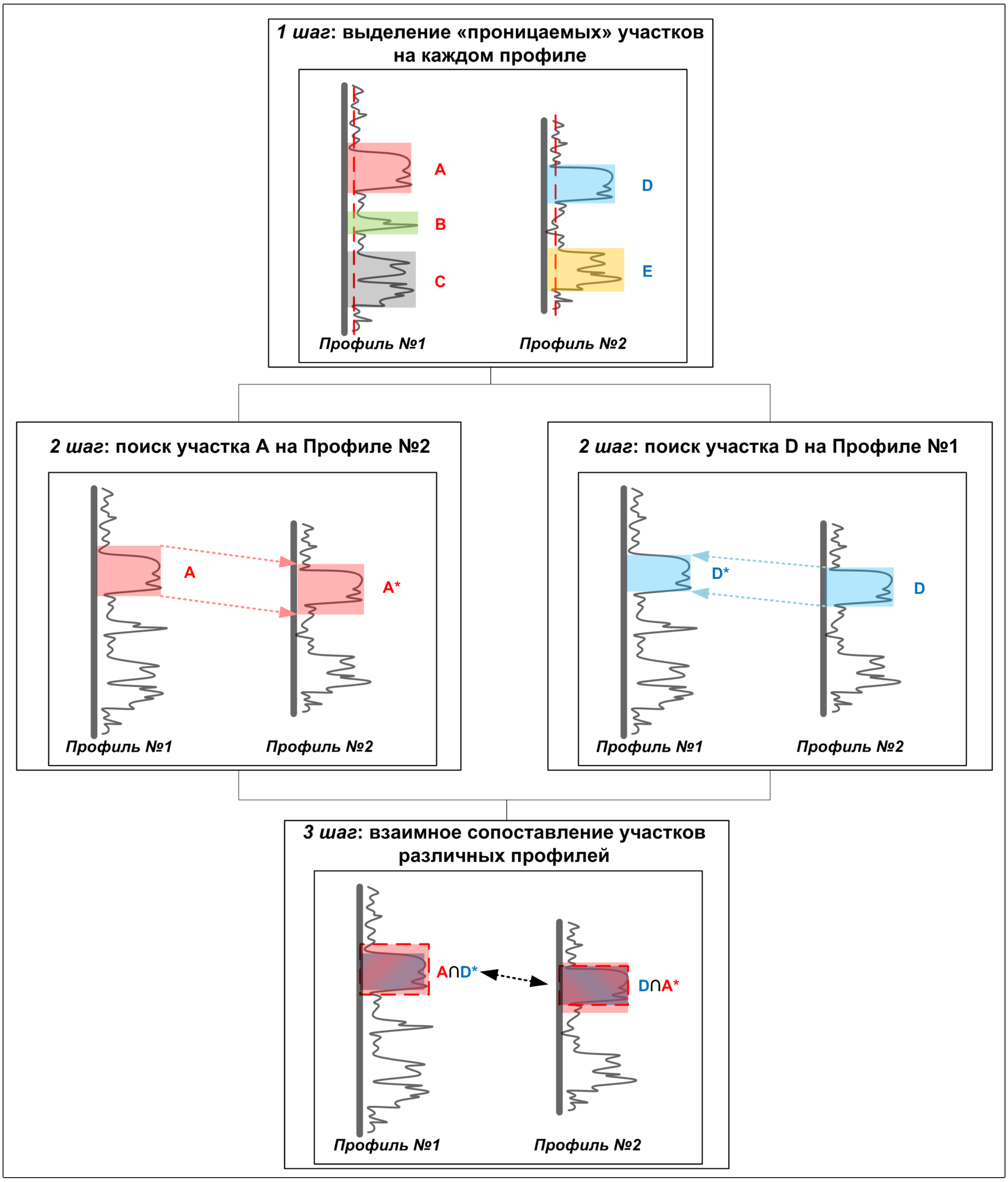
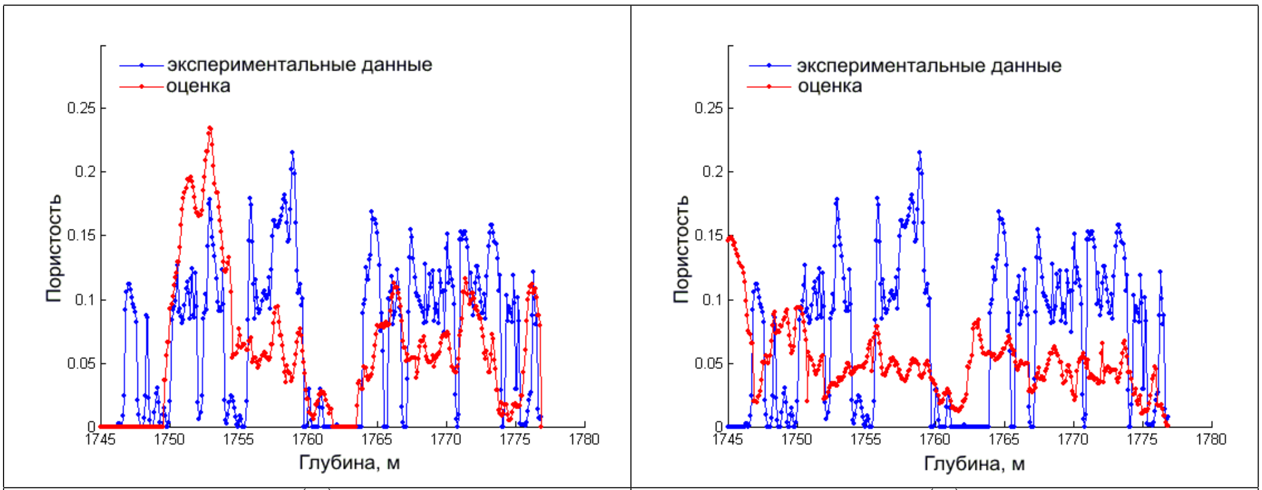


Рис. 2: **Схема работы морфологического алгоритма сопоставления геологических разрезов скважин по данным геофизических исследований.**

Задача заключалась в следующем. Были даны шесть профилей пористости[14] по шести скважинам месторождения. Требовалось построить оценку значений коэффициента пористости вдоль траектории одной из скважин по данным от пяти оставшихся, затем сравнить полученные значения с экспериментальными значениями коэффициента пористости по этой скважине.

[14]Под *профилем пористости* мы понимаем зависимость коэффициента пористости геологической породы (пористой среды) от глубины (координаты).



(а)	(б)

Рис. 3: **Прогноз значений коэффициента пористости вдоль траектории скважины.**

Для выделения областей локальной стационарности данных, в роли которых в рассмотренной задаче выступили геологические пропластки, был предложен морфологический алгоритм сопоставления геологических разрезов скважин по данным геофизических исследований.

Работа морфологического алгоритма схематично показана на рис. 2. Первый шаг состоит в выделении на исходных профилях пористости связных участков, на которых значения коэффициента пористости превышают некоторую пороговую величину[15]. На втором шаге алгоритма согласно морфологическому критерию[16] для каждого из выделенных на первом шаге участков находят его «отражения» (схожие по форме участки) на других профилях (профилях, которым не принадлежит данный участок). На третьем шаге рассматривают пересечения выделенных на первом шаге участков профилей и «отражений». Для того чтобы участки, принадлежащие различным профилям, были отнесены к одному пропластку, они должны иметь значительное пересечение с «отражениями» друг друга.

Модифицированный метод кригинга в сочетании с морфологическим алгоритмом был использован для решения описанной выше задачи прогноза значений коэффициента пористости вдоль траектории скважины – результат прогноза показан на рис. 3(а) (красным цветом показаны прогнозные значения, синим цветом – экспериментальные значения). На рис. 3(б) показан результат аналогичного прогноза, выполненного методом простого кригинга. Использование модифицированного метода кригинга повысило достоверность прогноза[17], о чем свидетельствует увеличение выбороч-

[15]Данную процедуру можно интерпретировать как выделение «проницаемых» интервалов.

[16]*Пытьев Ю. П., Чуличков А. И.* Методы морфологического анализа изображений. М: ФИЗМАТЛИТ, 2010.

[17]Примечательно, что модифицированный метод позволил выделить непроницаемый прослой на глубинах 1762–1764 м. Наличие таких «перегородок» течению нефти необходимо учитывать, к примеру, при проектировании разработки залежи с применением вертикального вытеснения.

ного коэффициента корреляции между прогнозными и экспериментальными значениями коэффициента пористости в серии прогнозов.

В **третьей главе** диссертации рассматривалась классическая математическая модель процесса нефтеизвлечения – начально-краевая задача для системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных[18], которая описывает процесс совместного течения нескольких жидкостей (например, воды и нефти) в поровом пространстве геологических пород.

В геостатистике параметры геологических пород (коэффициент пористости, элементы тензора проницаемости и др.), фигурирующие в начально-краевой задаче, считают реализациями случайных функций. Интерес представляет влияние «случайности» параметров модели на результат математического моделирования процесса нефтеизвлечения.

Типичный подход к решению данной задачи сводится к использованию метода Монте-Карло для изучения зависимости результатов моделирования от «статистического разброса» исходных параметров модели. При этом большое методологическое значение имеют работы[19], в которых в вероятностной постановке получают аналитические решения некоторого класса задач.

В диссертационной работе была рассмотрена простейшая математическая модель, описывающая процесс вытеснения нефти водой в неоднородной пористой среде – классическое уравнение Бакли–Леверетта[20]. В одномерном случае это уравнение может быть записано в виде

$$\varphi\,\partial_t s = -U\partial_x F(s), \tag{5}$$

где φ – коэффициент пористости среды, $s=s(t,x)$ – искомая насыщенность порового объема водой, U – суммарный объемный поток нефти и воды, $F(\cdot)$ – функция Бакли–Леверетта, значение $F(s)$ которой равно объемной доле воды в потоке U. Уравнение (5) дополняют начальным и граничным условиями

$$\begin{aligned} s(t,x)\big|_{t=\mathcal{T}_1} &= s_0(x), \qquad x\in[\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2],\\ s(t,x)\big|_{x=\mathcal{A}_1} &= \mathfrak{s}(t), \qquad\ \ t\in[\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2]. \end{aligned} \tag{6}$$

Решение $s(\cdot)$ получившейся начально-краевой задачи ищут в прямоугольной области $[\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2]\times[\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2]$, при этом $\varphi(\cdot)$ и $U(\cdot)$ считают известными функциями координаты и времени соответственно.

Начально-краевая задача (5), (6) для нелинейного гиперболического уравнения (5), вообще говоря, имеет разрывные решения. В этом случае

[18] *Азиз Х., Сеттари Э.* Математическое моделирование пластовых систем. Ижевск: ИКИ, 2004; *Каневская Р. Д.* Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов. Ижевск: ИКИ, 2002.

[19] См. *Швидлер М. И.* Статистическая гидродинамика пористых сред. М.: Недра, 1985.

[20] *Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984.

понятие классического решения становится непригодным и заменяется понятием слабого решения[21]. *Слабым решением* задачи (5), (6) называют функцию $s(\cdot) :\ [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2] \times [\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2] \to [0, 1]$, гладкую в области определения, за исключением, быть может, некоторой поверхности в пространстве (x, t), на которой $s(\cdot)$ имеет разрыв. При этом функция $s(\cdot)$ удовлетворяет условиям (6), и для всякой непрерывной вместе со своими первыми производными финитной на $[\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2] \times [\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2]$ функции $v(\cdot)$ справедливо равенство

$$\int_{\mathcal{T}_1}^{\mathcal{T}_2} dt \int_{\mathcal{A}_1}^{\mathcal{A}_2} dx\, (\varphi s\, \partial_t v + UF(s)\, \partial_x v) + \int_{\mathcal{A}_1}^{\mathcal{A}_2} dx\ \varphi s(\mathcal{T}_1, x) v(\mathcal{T}_1, x) = 0. \qquad (7)$$

В диссертационной работе задача (5), (6) решалась в следующей постановке. Фигурирующий в уравнении Бакли–Леверетта (5) коэффициент пористости φ рассматривался как случайная функция координаты, т. е. $\varphi(\cdot) :\ [\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2] \times \Omega \to [0, 1]$, где Ω – пространство элементарных событий, на σ-алгебре которого задана вероятностная мера. Все реализации случайной функции $\varphi(\cdot)$ предполагались непрерывными функциями координаты.

Рассматривалось слабое решение (7) задачи (5), (6) для всякой реализации случайной функции $\varphi(\cdot)$. Для решения поставленной задачи была использована комбинация аналитического (метод характеристик) и численного (ориентированные против потока и гибридные разностные схемы) подходов.

В работе было получено явное выражение для стохастических характеристик[22] уравнения Бакли–Леверетта в случае постоянного значения U:

$$\tilde{t}(x; \tilde{s}) = t_0(\tilde{s}) + \frac{\int_{\mathcal{A}_1}^{x} dy\, \varphi(y, \omega)}{UF'(\tilde{s})}, \qquad (8)$$

где $\tilde{s}$ – заданное значение насыщенности водой, которое сохраняется на характеристике $\tilde{t}(\cdot)$, $t_0(\tilde{s})$ – момент времени, когда насыщенность водой примет значение $\tilde{s}$ в точке $\mathcal{A}_1$, $F'(\cdot)$ – производная функции Бакли–Леверетта, $x \in [\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2]$, $\omega \in \Omega$.

Явное выражение (8) для характеристик уравнения (5) позволило сформулировать алгоритм построения приближенных решений задачи (5), (6), сколь угодно близких к точному решению. С помощью этого алгоритма в вычислительном эксперименте изучалась точность численных методов решения начально-краевых задач для нелинейных гиперболических уравнений. В работе рассматривались два численных метода: метод *ориентированных против потока разностных схем*[23] и *гибридный метод* Федо-

[21] *LeVeque, R. J.* Finite-Volume Methods for Hyperbolic Problems. Cambridge: Cambridge University Press, 2004; *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.

[22] Традиционно характеристики уравнения (5) строят в виде $\tilde{x}(\cdot)$ – функций, заданных на $[\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$, что для случая постоянного коэффициента пористости приводит к простому выражению для таких характеристик. В диссертации характеристики уравнения (5) рассматривались в виде $\tilde{s}$-параметрического семейства функций $\tilde{t}(\cdot)$, заданных на $[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2]$.

[23] Иначе такие схемы называют схемами Куранта–Изаксона–Риса. В англоязычной литературе «ориентированным против потока» разностным схемам соответствует термин "upwind schemes".

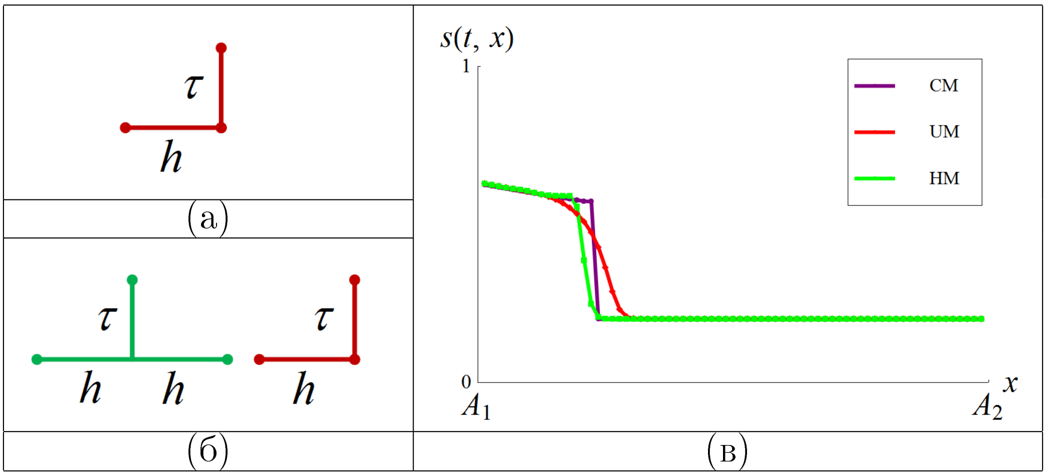


Рис. 4: **Численные решения уравнения Бакли–Леверетта.**

ренко[24].

Метод ориентированных против потока разностных схем является наиболее популярным численным методом решения уравнения Бакли–Леверетта[25]. В диссертации обоснована перспективность использования гибридного метода Федоренко, предусматривающего адаптивное переключение порядка аппроксимации разностной схемы.

На рис. 4(а) изображен шаблон классической ориентированной против потока разностной схемы. Шаблон гибридной разностной схемы изображен на рис. 4(б): зеленым цветом показан шаблон, применяющийся в области гладкого решения, красным цветом – в области разрыва решения. Данные численные схемы являются явными по времени, условно устойчивыми при соблюдении условия Куранта–Фридрихса–Леви

$$\tau \leqslant \frac{h\varphi_*}{U^* F'(s^*)},$$

где τ и h – шаги сетки по времени и координате, $\varphi_* = \min_{x\in[\mathcal{A}_1,\, \mathcal{A}_2]} \varphi(x)$, $U^* = \max_{t\in[\mathcal{T}_1,\, \mathcal{T}_2]} U(t)$, $s^* = \arg\left\{\max_{s\in[0,\,1]} F'(s)\right\}$.

На рис. 4(в) показаны численные решения задачи (5), (6) (красная кривая – расчет выполнен по ориентированной против потока схеме, зеленая кривая – по гибридной схеме) и заведомо более точное решение, полученное с помощью характеристик (8) (фиолетовая кривая). Видно, что ориентированная против потока разностная схема сглаживает решение – это происходит за счет «аппроксимационной вязкости» схем первого порядка. Гибридная схема дает численное решение, более близкое к точному решению.

В вычислительном эксперименте изучалось поведение решений задачи (5), (6) во времени. Моделировался процесс вытеснения нефти водой из неоднородного образца пористой среды, зависимость коэффициента

[24] *Петров И. Б., Лобанов А. И.* Лекции по вычислительной математике. М.: БИНОМ, 2006.

[25] *Trangenstein, J. A.* Numerical Solution of Hyperbolic Partial Differential Equations. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.

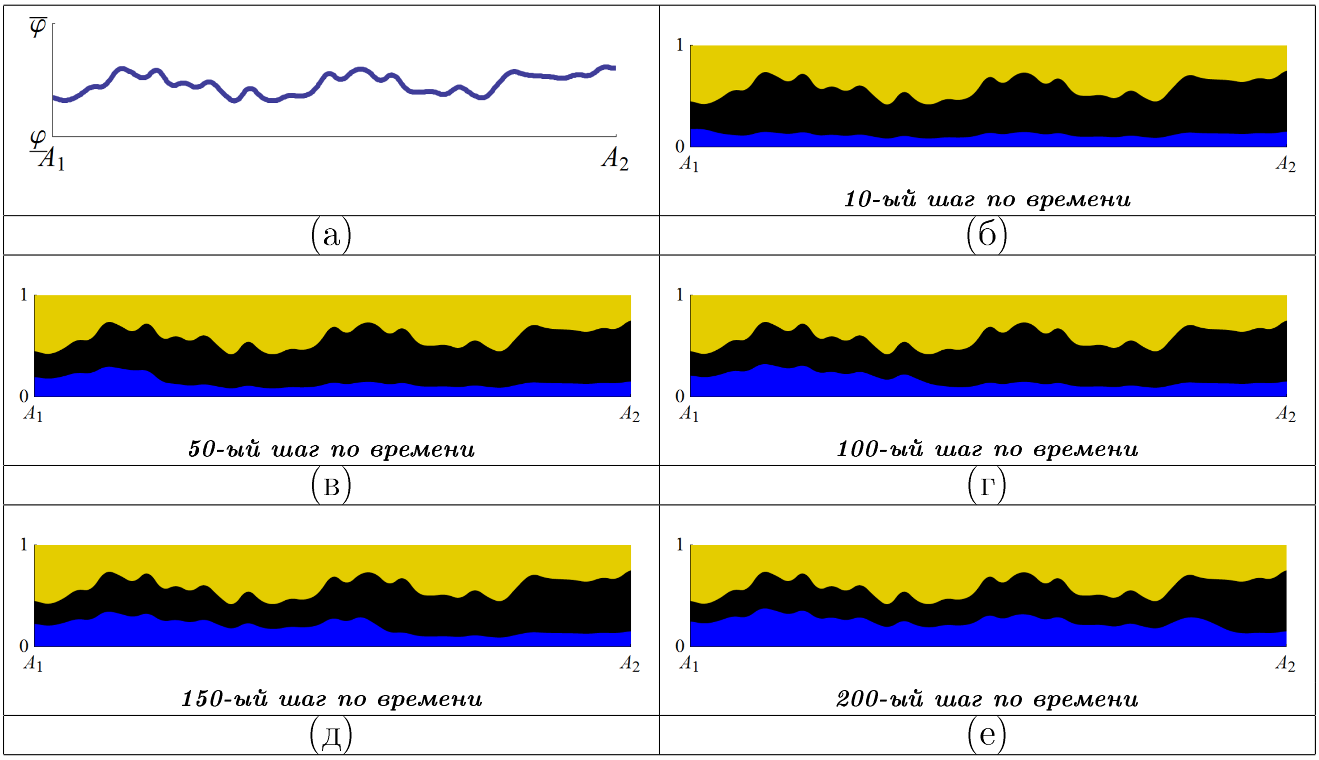


Рис. 5: **Численные решения начально-краевой задачи для уравнения Бакли–Леверета в различные моменты времени.**

пористости от координаты для которого показана на рис. 5(а). Численные решения[26] задачи (5), (6) в различные моменты времени показаны на рис. 5(б)–5(е) (желтым цветом изображена доля объема пористой среды, занятая твердым скелетом, черным цветом – доля объема, занятая нефтью, синим цветом – занятая водой). Видно, что со временем насыщенность водой растет, что отражает физический смысл рассмотренной задачи о вытеснения нефти водой.

В предположении случайности параметра $\varphi(\cdot)$ в задаче (5), (6), изучались статистические свойства такого важного показателя нефтедобычи[27], как время прорыва фронта вытеснения нефти водой $\widetilde{t}_+$. С помощью (8) были получены аналитические выражения для его математического ожидания и дисперсии:

$$m = \mathrm{E}\,\widetilde{t}_+ = t_0(s_+) + \frac{\int_{\mathcal{A}_1}^{\mathcal{A}_2} dy\ \mathrm{E}\,\varphi(y)}{UF'(s_+)},$$

$$D = \mathrm{D}\,\widetilde{t}_+ = \frac{1}{U^2F'(s_+)^2}\int_{\mathcal{A}_1}^{\mathcal{A}_2} dy \int_{\mathcal{A}_1}^{\mathcal{A}_2} dy'\,\mathrm{cov}\,(\varphi(y), \varphi(y'))\,, \qquad (9)$$

где s_+ – значение насыщенности водой за фронтом вытеснения.

Аналитические значения m и D сопоставлялись с выборочными оценками $\widehat{m}$ и $\widehat{D}$ этих величин по серии из N расчетов времени прорыва фронта вытеснения нефти водой (в вычислительных экспериментах, подобных

[26] Изображенные на рис. 5(б)–5(е) численные решения были получены с помощью гибридной разностной схемы.

[27] *Басниев К. С., Кочина И. Н., Максимов В. М.* Подземная гидромеханика. М.: Недра, 1993.

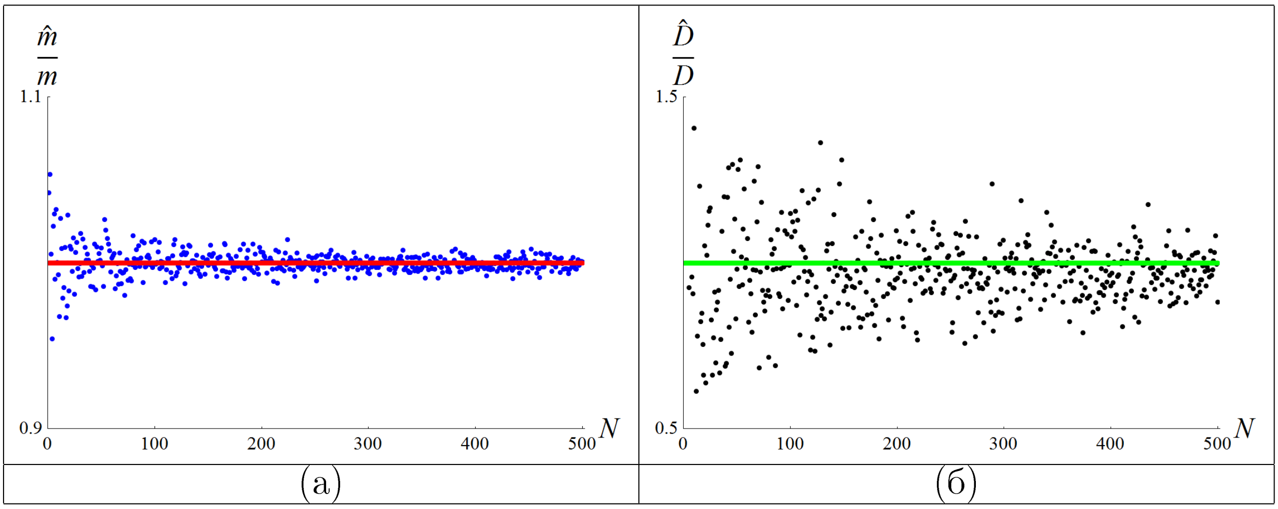


Рис. 6: **Сопоставление выборочных и аналитических оценок математического ожидания и дисперсии времени прорыва фронта вытеснения нефти водой.**

проиллюстрированным на рис. 5(б)–5(е)) для различных реализаций случайной функции коэффициента пористости. Полученные результаты показаны на рис. 6. Видно, что с ростом N совпадение выборочных и аналитических оценок растет, что косвенно свидетельствует о состоятельности выборочных оценок для $\mathrm{E}\,\widetilde{t}_+$ и $\mathrm{D}\,\widetilde{t}_+$ в задачах, где соответствующие аналитические значения не известны.

В **четвертой главе** диссертационной работы описаны структура и функционал созданного комплекса программ. Комплекс включает три модуля: 1) модуль для работы с пространственными данными (алгоритмы метода кригинга, анализ и обработка данных геофизических исследований скважин); 2) модуль компьютерного моделирования процесса вытеснения нефти водой в неоднородной пористой среде (алгоритмы численного решения нелинейных гиперболических уравнений); 3) модуль компьютерного моделирования реализаций случайных коррелированных полей.

Для создания в вычислительном эксперименте реализаций случайных полей с заданными статистическими параметрами (моментами первого и второго порядка) был реализован популярный геостатистический алгоритм. Работа алгоритма проиллюстрирована на рис. 7: показаны три модели случайных полей, различающихся ковариациями значений случайного поля. В частности, с помощью реализованного геостатистического алгоритма была построена модель локально стационарных случайных данных во второй главе работы (см. рис. 5(а)), а также получены реализации случайной функции коэффициента пористости в третьей главе диссертации (см. для примера рис. 1(а)).

В **заключении** кратко сформулированы основные результаты и выводы, полученные в диссертации.

- Проведен анализ существующих вероятностных методов математического моделирования естественных нефтегазовых систем, определены

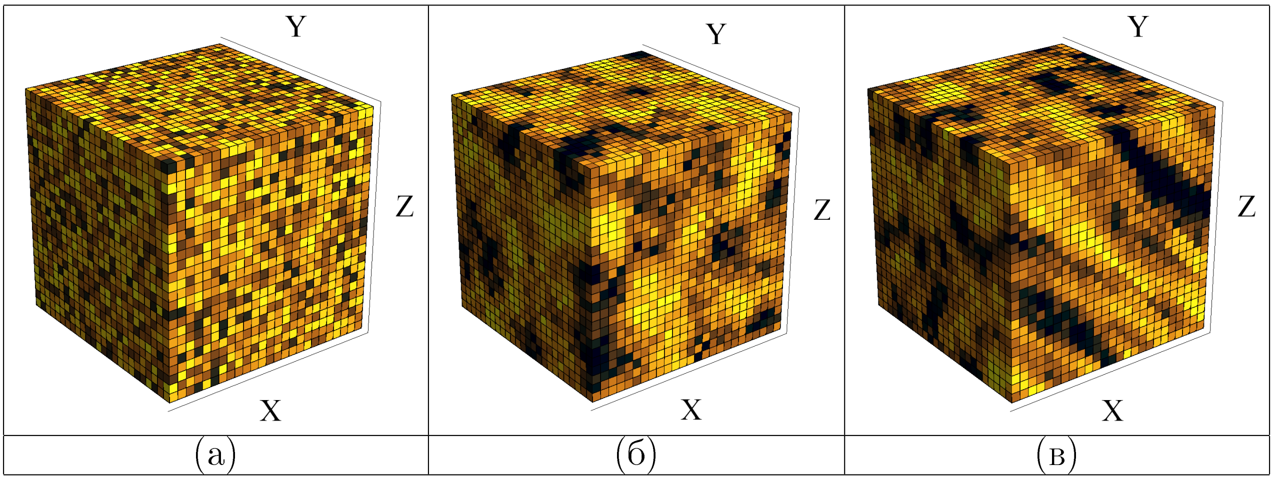


Рис. 7: **Модели случайных полей с различными статистическими параметрами.**

актуальные направления развития и применения методов теории случайных функций в данной области.

◇ Рассмотрены две основные задачи, отражающие различные аспекты математического моделирования естественных нефтегазовых систем: 1) задача статистического оценивания значений геолого-геофизических параметров с учетом априорных представлений о типичной структуре нефтяных месторождений; 2) задача изучения математической модели процесса нефтеизвлечения, содержащей случайные параметры.

◇ Предложены новые методы и вычислительные алгоритмы, применимые в задачах математического моделирования естественных нефтегазовых систем: модификация метода построения оптимальных статистических оценок и интерполяции пространственных данных (метода кригинга), опирающаяся на введенное в работе понятие локально стационарной случайной функции, и морфологический алгоритм сопоставления геологических разрезов скважин по данным геофизических исследований.

◇ Разработаны приближенные аналитические методы и вычислительные алгоритмы решения начально-краевой задачи для уравнения Бакли–Леверетта со случайным параметром; получены статистические оценки параметров процесса вытеснения нефти водой в неоднородной пористой среде.

◇ Создан многофункциональный комплекс программ, реализующий предложенные в работе методы и вычислительные алгоритмы математического моделирования естественных нефтегазовых систем, работы с данными геофизических исследований скважин, решения нелинейных гиперболических уравнений, статистического моделирования случайных коррелированных полей.

◇ Результаты диссертационной работы могут быть использованы в задачах прогноза значений геолого-геофизических параметров, анализа и интерпретации данных геофизических исследований скважин, построения численных решений нелинейных гиперболических уравнений, интерпретации результатов лабораторных экспериментов по фильтрации на кернах.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих научных изданиях.

Публикации в журналах из Перечня ВАК:

1. *Исаева А. В., Сердобольская М. Л.* Решение уравнения Бакли–Леверетта со случайным коэффициентом пористости // Вычислительные методы и программирование. Т. 13. 2012. С. 517–524.
2. *Макаров С. С., Исаева А. В., Грачев Е. А., Сердобольская М. Л.* Ускорение вычислений при решении неоднородного уравнения диффузии с помощью перенормировочного метода // Вычислительные методы и программирование. Т. 13. 2012. С. 239–246.
3. *Исаева А. В.* Новый алгоритм автоматической корреляции скважин // Нефтяное хозяйство. 2011. 11. С. 24–26.
4. *Исаева А. В., Сердобольская М. Л.* Гипотеза локальной стационарности в задаче стохастического прогноза методом кригинга // Вестник МГУ. Сер. 3. (Физ., Астрон.). 2011. 2. С. 14–19.

Публикации в других научных изданиях:

5. *Исаева А. В.* Исследование математической модели термогазового воздействия на нефтяной пласт в вычислительном эксперименте // Материалы XIX Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов». Москва, 2012. С. 110–111.
6. *Исаева А. В.* Компьютерная реализация морфологических методов в задачах нефтегазовой геофизики // Материалы XVIII Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов». Москва, 2011. С.132.
7. *Исаева А. В.* Морфологический алгоритм идентификации пропластков // Сб. 18-й Международной конференции «Математика. Компьютер. Образование». Пущино, 2011. С. 201.
8. *Исаева А. В.* Задача стохастического прогноза геофизических данных: гипотеза стационарности // Материалы XVI Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов». Москва, 2009. С. 48.
9. *Исаева А. В., Сердобольская М. Л., Грачев Е. А.* Гипотеза слабой стационарности в задаче стохастического прогноза геофизических наборов данных // Сб. 16-й Международной конференции «Математика. Компьютер. Образование». Пущино, 2009. С. 117.