На правах рукописи

БУДНИКОВА ОЛЬГА СЕРГЕЕВНА

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МНОГОШАГОВЫМИ МЕТОДАМИ

01.01.07 — «Вычислительная математика»

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Иркутск — 2015

Работа выполнена на кафедре математики и методики обучения математике Педагогического института Федерального государственного бюджетного учреждения высшего профессионального образования «Иркутский государственный университет»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
гл. научный сотрудник Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт динамики систем и теории управления
Сибирского отделения Российской академии наук,
Булатов Михаил Валерьянович

Официальные оппоненты: **Апарцин Анатолий Соломонович,**
доктор физико-математических наук,
гл. научный сотрудник Федерального государственного бюджетного учреждения науки
Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева
Сибирского отделения Российской академии наук

Кузнецов Евгений Борисович,
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры дифференциальных уравнений
Федерального государственного бюджетного учреждения высшего профессионального образования
«Московский авиационный институт»

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт вычислительного моделирования
Сибирского отделения Российской академии наук

Защита состоится 3 апреля 2015 года в 16:00 ч. на заседании диссертационного совета Д 501.002.09 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, г. Москва, Ленинские горы, д.1, стр. 4, НИВЦ МГУ, конференц зал.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский проспект, 27) и на сайте: http://srcc.msu.ru/nivc/sci/dissert/dissert.html

Автореферат разослан _________ 2015 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Суворов В.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность построения численных методов решения интегро-алгебраических уравнений (ИАУ) обусловлена их широким применением в практике. Многие задачи, возникающие при математическом моделировании различных развивающихся систем, гидравлических и электрических цепей, описываются системой взаимосвязанных интегральных уравнений Вольтерра I и II рода и алгебраических уравнений. В данных моделях интегральные уравнения отвечают за динамику исследуемого процесса, а алгебраические уравнения – за балансовые соотношения.

Эти системы взаимосвязанных уравнений представимы в виде ИАУ:

$$A(t)x(t) + \int\limits_0^t K(t,s)x(s)ds = f(t),\ 0 \le s \le t \le 1,$$

где $A(t)$ — матрица размерности $(n \times n)$, $K(t,s)$ — матрица, задающая ядро интегрального уравнения, размерности $(n \times n)$, $x(t)$, $f(t)$ — искомая и известная $n-$мерные вектор-функции и

$$det A(t) \equiv 0.$$

Следует заметить, что необходимость разработки эффективных численных методов решения ИАУ связана еще и с тем, что при решении дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ) возникает проблема согласования начальных данных с правой частью. Одним из подходов согласования является иная запись таких уравнений, а именно, в интегральной форме:

$$A(t)x(t) + \int\limits_0^t (B(s) - A'(s))x(s)ds = \int\limits_0^t f(s)ds + A(0)x(0).$$

Частным случаем ИАУ при $n = 1$ являются интегральные уравнения Вольтерра I рода (ИУВ I). Качественная теория таких уравнений, как с гладкими ядрами, так и с ядрами, содержащими различные особенности, к настоящему времени достаточно полно развита[1 2 3 4]. А их численное решение начало бурно развиваться с начала-середины 70-х годов. В статье[5] впервые было доказано, что сама процедура дискретизации ИУВ I, основанная на простейших формулах прямоугольников, обладает регуляризирующим свойством. Параметром регуляризации, при этом, выступает шаг квадратурной формулы, определенным образом связанный с уровнем возмущений входных данных. Иные квадратурные формулы высокого порядка точности зачастую порождают расходящийся процесс[6 7]. С той поры вышло множество статей и ряд монографий по этой теме[8 9 10], однако, в деталях исследованы только два случая: ядро на диагонали не обращается в ноль ни в одной точке заданного отрезка и ядро на диагонали тождественный ноль, а производная по t на диагонали не обращается в ноль ни в одной точке заданного отрезка.

Разработка качественной теории и численных методов решения ИАУ находятся в начале пути.

Качественному исследованию линейных ИАУ в бесконечномерных пространствах посвящен цикл работ Н.А. Сидорова и его учеников, М.С. Никольского и других.

К настоящему времени опубликовано несколько десятков работ по численному решению полуявных ИАУ, т.е. когда задача имеет вид

---

[1] Краснов, М. Л. Интегральные уравнения/ М. Л. Краснов. – М.: Наука, 1975

[2] Верлань, А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, решения/ А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. — Киев: Наукова думка, 1986.

[3] Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и их приложения/ С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск: Наука и Техника, 1987.

[4] Brunner, H. 1896-1996: One hundred years of Volterra integral equations of the first kind//Applied Numerical Mathematics, 1997. – Vol. 24. – pp.83–93

[5] Апарцин, А. С. Приближенное решение интегральных уравнений Вольтерра 1 рода методом квадратур/А. С. Апарцин, А. Б. Бакушинский// Дифференциальные и интегральные уравнения. – Иркутск: ИГУ, 1972. – Вып.1. – С.248–258.

[6] Тен Мен Ян. Приближенное решение линейных интегральных уравнений Вольтерра I рода: дис. ...канд. физ. мат. наук/ Тен Мен Ян. – Иркутск, 1985. – 215 с.

[7] Linz, P. Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations/ P. Linz. – SIAM, Philadelphia, 1985.

[8] Апарцин, А. С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы/ А. С. Апарцин. – Новосибирск : Наука. Сибирская издательская фирма РАН, 1999. – 193 с.

[9] Brunner, H. The numercal solution of Volterra equations/H. Brunner, P. J. van der Houwen. – Amsterdam: North-Holland, CWI Monographs 3, 1986.

[10] Brunner, H. Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functioal Equations/ H. Brunner. – Unversity Press, Cambridge, 2004.

$$\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} +$$

$$\int\limits_0^t \begin{pmatrix} K_{11}(t,s) & K_{12}(t,s) \\ K_{21}(t,s) & K_{22}(t,s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(s) \\ z(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix},$$

$$0 \le s \le t \le 1,\ det\big(K_{22}(t,t)\big) \ne 0\ \forall t \in [0,1].$$

где E_m – единичная матрица размерности m, $K_{11}(t,s), K_{12}(t,s)$, $K_{21}(t,s), K_{22}(t,s)$ – матрицы размерности $(m \times m), (m \times (n-m))$, $((n-m) \times m)$, $((n-m) \times (n-m))$ соответственно, 0 – нулевые матрицы подходящих размерностей, $y(t)$ и $\varphi(t)$ – $m-$мерные, $z(t)$ и $\psi(t)$ – $(n-m)-$мерные вектор-функции.

Первая статья вышла в 1987 году[11], в которой для численного решения линейных ИАУ индекса один предложен простейший метод, основанный на квадратурной формуле правых прямоугольников. Несколько позже, в 1990 году, вышла статья W. Gear (США), в которой дано понятие индекса по невязке (аналогичное определению степени некорректности, введенному Апарциным А.С. в 1983 году) подходящее для очень узкого класса задач.

В конце 90-х М.В. Булатовым и В.Ф. Чистяковым были проведены исследования на предмет существования единственного решения ИАУ с ядром типа свертки[12]. В 2000 году Kauthen P.-J. (Швейцария) и 2010 – 2013 Hadizadeh M. (Иран) с учениками разработали методы Рунге-Кутта и применение полиномов наилучшего приближения для полуявных ИАУ.

ИАУ со слабой особенностью в ядре в литературе почти не рассматриваются. В 1998 году Brunner H. и Булатов М.В. провели исследование одного класса таких уравнений и предложили численный метод их решения[13].

[11]Чистяков, В. Ф. О сингулярных системах обыкновенных дифференциальных уравнений и их интегральных аналогах/ В. Ф. Чистяков//Функции Ляпунова и их применения. — Новосибирск: Наука, 1987. – С. 231–239.

[12]Bulatov, M. V. The properties of differential-algebraic systems and their integral analogs/ M. V. Bulatov, V. F. Chistyakov// Preprint, Memorial University of Newfoundland, 1997. – 35 p.

[13]Brunner, H. On singular systems of integral equations with weakly singular kernels/ H. Brunner, M. V. Bulatov//Proceeding of the 11-th Baikal International School Seminar: Optimization Methods and their Applications, 1998. – pp. 64-–67.

Более подробное описание библиографии по численному решению ИАУ можно посмотреть в вышедшей монографии H. Brunner в 2004 году[10] и в статье иранских коллег[14].

В силу того, что рассматриваемые в диссертации задачи включают в себя ИУВ I рода, они также относятся к классу некорректных задач. То есть, если исходная задача имела единственное решение, то сколь угодно малое возмущение данных задачи может привести к сколь угодно большим возмущениям решения или к его отсутствию.

Основоположниками теории некорректных задач являются А.Н. Тихонов, В.К. Иванов, М.М. Лаврентьев. Большой вклад в теорию некорректно поставленных задач внесли А.Л. Агеев, А.С. Апарцин, В.В. Арестов, А.В. Бакушинский, В.В. Васин, Ф.П. Васильев, А.М. Денисов, О.А. Лисковец, И.В. Мельникова, В.А. Морозов, В.Г. Романов, В.П. Танана, А.Г. Ягола и многие другие математики. В данной диссертационной работе показано, что предложенные многошаговые методы для численного решения линейных ИАУ обладают свойством саморегуляризации, то есть параметром регуляризации является шаг дискретизации.

Целью диссертационной работы является построение и исследование многошаговых методов для численного решения линейных ИАУ.

На защиту выносятся следующие результаты, соответствующие паспорту специальности 01.01.07 – вычислительная математика.

1. Построены многошаговые ($k-$шаговые) методы для численного решения ИАУ и их модификация. Выделен класс ИАУ для которых доказано, что предложенные методы сходятся к точному решению с порядком $k+1$.

2. Доказана устойчивость многошаговых методов к возмущениям правой части ИАУ: если вместо точной правой части $f(t)$ задана вектор-функция $\widehat{f}(t)$ такая, что

$$||\widehat{f}(t) - f(t)|| = ||\delta(t)|| \leq \delta,$$

[14]Pishbin, S. The semi-explicit Volterra integral algebraic equations with weakly singular kernel: The numerical treatments/ S. Pishbin, F. Ghoreishi , M. Hadizadeh // Journal of Computational and Applied Mathematics, 2013. – Vol. 245. – № 1. – pp. 121–132.

то справедлива оценка

$$||\widehat{x}_j - x(t_j)|| = O(\delta^{\frac{k+1}{k+2}}).$$

3. На интегральных уравнениях

$$x(t) - \int\limits_0^t (\lambda + \mu(t-\tau))x(\tau)d\tau = g(t), \lambda, \mu \leq 0,$$

$$\int\limits_0^t (1 - \zeta(t-\tau) - \frac{\eta}{2}(t-\tau)^2)x(\tau)d\tau = f(t), \zeta, \eta \leq 0,$$

содержащих жесткие и быстроосциллирующие компоненты, детально изучены свойства предложенных методов: построены области устойчивости.

4. Построены многошаговые методы для численного решения ИАУ типа Абеля.

Объектами исследования являются линейные ИАУ.

Методологической основой исследования являются основные результаты из теории квадратурных методов решения интегральных уравнений, теории матричных пучков и теории устойчивости.

Научная новизна. В диссертации разработаны многошаговые методы высокого порядка точности для численного решения линейных ИАУ. Доказана их сходимость. Показана устойчивость предложенных методов к возмущению входных данных, а также эффективность данных алгоритмов к решению жестких задач и задач содержащих быстроосциллирующие компоненты. Кроме того, предложены многошаговые методы для численного решения ИАУ со слабой особенностью ядра.

Теоретическая и практическая ценность. На основе явных методов типа Адамса и экстрополяции построены алгоритмы для численного решения линейных интегро-алгебраических уравнений. Разработанные в диссертации многошаговые методы могут быть использованы для численного решения различных прикладных задач.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на Международных конференциях: «Аналитическая механика, устойчивость и управление» (Казань, 2012), «Нелинейнай анализ и экстремальные задачи» (Иркутск, 2012), «Обратные и некорректные задачи математической физики» (Новосибирск, 2012), «Математическое моделирование, вычислительно-информационные технологии и управление» (Монголия, 2013), «Scientific Computation And Differential Equations» (Испания, 2013), «The V Congress of Turkic World Mathematicians» (Киргизия, 2014);на Международных семинарах «New Approaches in the Analysis and Numerical Solution of Differential and Integral Equations» (Иркутск – Ханой, 2010, 2011, 2013, 2014); на Всероссийских конференциях «Математическое моделирование и информационные технологии» (Иркутск, 2010), «Современные проблемы обучения математике» (Иркутск, 2012, 2013, 2014), на Ляпуновских чтениях Института динамики систем и теории управления СО РАН (Иркутск, 2013); на смотрах студенческих работ ГОУ ВПО «Восточно-Сибирская государственная академия образования» (Иркутск, 2010, 2011).

Диссертационная работа была выполнена при поддержке грантов 13–01–93002–Вьет–а, 14–01–31224 мол_а.

Публикации и личный вклад автора. Основные результаты диссертации опубликованы в 15 работах, среди которых 6 статей, в том числе три работы в журналах, рекомендованных ВАК РФ [1-3].

В совместных статьях М. В. Булатову принадлежит идея построения численного метода. Результаты, выносимые на защиту, получены автором лично и не нарушают авторских прав других лиц.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на 12 параграфов, заключения, списка литературы (73 наименования), занимает 123 страницы текста, набранного в системе LATEX.

В работе принята двойная нумерация для формул и тройная для теорем, лемм, примеров. Если осуществляется ссылка на формулу, то первая цифра обозначает номер главы, вторая – номер формулы. Если ссылка идет на теорему, лемму или пример, то первая цифра обозначает номер главы, вторая

– номер параграфа и третья цифра является номером теоремы, леммы или примера.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** сформулирована цель диссертационного исследования, обоснована его актуальность, представлен обзор литературы по изучаемой проблеме, приведены краткое содержание диссертации и ее основные результаты.

Первая глава посвящена вспомогательным теоретическим сведениям. В **первом параграфе** приводится классификация систем ИУВ, показано место рассматриваемых нами ИАУ в данной классификации. Во **втором параграфе** рассматриваются некоторые вопросы из теории матричных пучков. В **третьем параграфе** освящены сложности связанные с исследованием ИАУ и построением численных методов их решения.

Вторая глава посвящена численному решению линейных ИАУ с гладким ядром. В **первом параграфе** приведен описание квадратурных формул Адамса.

Зададим на отрезке $[0,1]$ равномерную сетку $t_i = ih, i = 1,2,\dots,N,\ h = \frac{1}{N}$. Тогда для заданной функции $g(t)$

$$\int\limits_0^{t_{i+1}} g(\tau)d\tau = \int\limits_0^{t_{k+1}} g(\tau)d\tau + \sum_{j=k+1}^{i} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} g(\tau)d\tau \approx$$

$$\int\limits_0^{t_{k+1}} L_{k+1}^0(g_0, g_1, ..., g_k, \tau)d\tau + \sum_{j=k+1}^{i} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} L_{k+1}^j(g_{j-k}, g_{j-k+1}, ..., g_j, \tau)d\tau =$$

$$= h\sum_{l=0}^{k} \beta_l g_l + \sum_{j=k+1}^{i} h \sum_{l=0}^{k} \gamma_l g_{j-l} = h\sum_{l=0}^{i} \omega_{i+1,l} g_l, \qquad (1)$$

где $L_{k+1}^j(g_{j-k}, g_{j-k+1}, ..., g_j, t)$ – интерполяционный полином степени k, проходящий через точки $(g_{j-k}, t_{j-k}), (g_{j-k+1}, t_{j-k+1}), ..., (g_j, t_j),\ j = k+1, k+2, \dots, i$.

Коэффициенты $\omega_{i+1,l}$ в (1) являются линейными комбинациями коэффициентов β_l и γ_l. Для наглядности приведем значения γ_l в табл. 1:

k	γ_0	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	Общий множитель
1	3	-1	-	-	-	-	$\frac{1}{2}$
2	23	-16	5	-	-	-	$\frac{1}{12}$
3	55	-59	37	-9	-	-	$\frac{1}{24}$
4	1901	-2774	2616	-1274	251	-	$\frac{1}{720}$
5	4277	-7923	9982	-7298	2877	-475	$\frac{1}{1440}$

Таблица 1: значения коэффициентов γ_l

Приведем коэффициенты $\omega_{i+1,l}$ для $k = 1, 2$.

$$\omega_{i+1,l} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & & & & \\ 3 & 3 & & & \\ 3 & 2 & 3 & & \\ 3 & 2 & 2 & 3 & \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \omega_{i+1,l} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 27 & & & & \\ 9 & 5 & 11 & 23 & & & \\ 9 & 5 & 16 & 7 & 23 & & \\ 9 & 5 & 16 & 12 & 7 & 23 & \\ 9 & 5 & 16 & 12 & 12 & 7 & 23 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

При приближенном вычислении интегралов для нечетных k коэффициент $\omega_{i+1,0} = 0$, поэтому нам не потребуется начальное значение g_0 и здесь при нечетных k первый нулевой столбец опущен.

Формула (1) называется явной квадратурной формулой Адамса.

Для численного решения ИУВ I

$$\int_0^t K(t,s)v(s)ds = f(t),\ t \in [0,T],\ 0 \le s \le t, \tag{2}$$

применяют k-шаговые методы, которые основаны на формуле (1)

$$h\sum_{l=0}^{i} \omega_{i+1,l} K_{i+1,l} v_l = f_{i+1},\ i = k, k+1, ..., N-1. \tag{3}$$

Предполагается, что начальные значения $v_0, v_1, ..., v_{k-1}$ заранее вычислены (например, методами типа Рунге–Кутты) с точностью

$$||v_j - v(t_j)|| = O(h^{k+1}),\ j = 0, 1, ..., k-1.$$

Известно, что методы (3) сходятся к точному решению задачи (2) с порядком $O(h^{k+1})$ при $k \leq 5$, а при $k > 5$ данные методы являются неустойчивыми. Это связано с тем, что корни характеристического уравнения

$$\sum_{j=0}^{k} \gamma_j \nu^{k-j} = 0,$$

при $k \leq 5$ лежат в единичном круге, а при $k > 5$ по крайней мере один корень по модулю больше единицы.

Во **втором параграфе** для численного решения линейных ИАУ с гладким ядром описана общая схема построения многошагвых методов (ММ).

Рассмотрим ИАУ

$$\begin{gathered} A(t)x(t) + \int\limits_0^t K(t,s)x(s)ds = f(t), \\ 0 \leq s \leq t \leq 1, det A(t) \equiv 0, \end{gathered} \tag{4}$$

где $A(t)$ и $K(t,s)$ — матрицы размерности $(n \times n)$, $f(t)$ — $n-$мерная известная вектор-функция, а $x(t)$ – $n-$мерная искомая вектор-функция. Предполагается, что элементы $A(t)$, $K(t,s)$, $f(t)$ обладают необходимой степенью гладкости. Под решением исходной задачи будем понимать любую непрерывную вектор-функцию $x(t)$, обращающую (4) в тождество.

Общие многошаговые методы имеют вид

$$A_{i+1} \sum_{j=0}^{k} \alpha_j x_{i+1-j} + h \sum_{l=0}^{i+1} \omega_{i+1,l} K_{i+1,l} x_l = f_{i+1}, \ i = k, k+1, \cdots, N-1, \tag{5}$$

где $\sum_{j=0}^{k} \alpha_j x_{i+1-j}$ – аппроксимация $x(t_{i+1})$, $h\sum_{l=0}^{i+1} \omega_{i+1,l} K_{i+1,l} x_l$ – аппроксимация интегрального слагаемого.

Предполагается, что начальные значения $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ заранее вычислены с достаточной точностью.

Формулы (5) могут быть

1) явными при $\alpha_0 \neq 0, \omega_{i+1,i+1} = 0$;

2) неявными при $\alpha_0 \neq 0, \omega_{i+1,i+1} \neq 0$.

Явные методы типа Адамса (3), описание которых приведено выше:

$$h\sum_{l=0}^{i}\omega_{i+1,l}K_{i+1,l}x_l = f_{i+1}$$

устойчивы для ИУВ I рода, у которых $K(t,t) \neq 0 \quad \forall t \in [0,1]$, однако напрямую их применять нельзя, так как это приводит к проблемам решения вырожденных систем линейных алгебраических уравнений

$$A_{i+1}x_{i+1} = f_{i+1} - h\sum_{l=0}^{i}\omega_{i+1,l}K_{i+1,l}x_l,\ i = k-1, k, \cdots, N-1.$$

В диссертации предлагается модифицировать явные методы Адамса, а именно, для вычисления интегрального слагаемого в (4), мы будем применять явные методы типа Адамса (3), а выражение $A_{i+1}x_{i+1}$ будем находить следующим образом.

Пусть $L^i_{k+1}(x_{i-k}, x_{i-k+1}, ..., x_i, t)$ – интерполяционный полином степени k, проходящий через точки $(x_{i-k}, t_{i-k}), (x_{i-k+1}, t_{i-k+1}), ..., (x_i, t_i)$. Будем вычислять x_{i+1} как значение данного интерполяционного полинома в точке $t = t_{i+1}$, то есть

$$x_{i+1} \approx L^i_{k+1}(x_{i-k}, x_{i-k+1}, ..., x_i, t_{i+1}) = \sum_{j=0}^{k}\alpha_j x_{i-j}.$$

Учитывая сказанное выше, предложенные многошаговые методы будут иметь вид

$$A_{i+1}\sum_{j=0}^{k}\alpha_j x_{i-j} + h\sum_{l=0}^{i}\omega_{i+1,l}K_{i+1,l}x_l = f_{i+1},\ i = k, k+1, \ldots, N-1. \qquad (6)$$

В табл. 2 приведены коэффициенты α_j для различных $k = 1, 2, ..., 5$.

k	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
1	2	-1	-	-	-	-
2	3	-3	1	-	-	-
3	4	-6	4	-1	-	-
4	5	-10	10	-5	1	-
5	6	-15	20	-15	6	-1

Таблица 2: значения коэффициентов α_j

Непосредственные вычисления показывают, что при $k \leq 5$ корни характеристического уравнения

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j \nu^{k-j} = 0$$

лежат в единичном круге.

Ограничение на k связано с тем, что явные методы Адамса (3), которые мы применяем для вычисления интегрального слагаемого, устойчивы при $k \leq 5$.

Четвертый параграф посвящен доказательству теоремы о сходимости предложенных ММ.

Т е о р е м а 1 . *Пусть для рассматриваемой задачи выполнены условия:*

1. элементы

$$x(t), A(t), f(t) \in C^{(k+1)}_{[0,1]}, K(t,s) \in C^{(k+2)}_{\Delta}, \Delta = \{0 \leq s \leq t \leq 1\};$$

2. пучок $\lambda A(t) + K(t,t)$ удовлетворяет критерию ранг-степень на всем отрезке $[0,1]$;

3. $rank A(0) = rank(A(0) \mid f(0))$;

4. для начальных значений справедливо

$$\|x_j - x(t_j)\| \leq Rh^{k+1}, R < \infty, \ j = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Тогда предложенные ММ при $k \leq 5$ сходятся к точному решению с порядком $k+1$, то есть справедлива оценка

$$\|x_i - x(t_i)\| = O(h^{k+1}), \ i = k, k+1, ..., N-1.$$

В конце параграфа представлены результаты численных расчетов, которые хорошо согласуются с теоретическими выкладками. В **пятом параграфе** показано, что предложенные ММ обладают свойством саморегуляризации, где параметром регуляризации является шаг сетки связанный с уровнем погрешности входных данных следующим сотношением:

$$h \asymp \delta^{\frac{1}{k+2}}.$$

В конце параграфа представлены результаты численной проверки устойчивости алгоритмов (6) к возмущениям входных данных на тестовом ИАУ с пилообразным возмущением правой части, т.е. вместо точного значения вектор-функции $f(t_{i+1})$ мы взяли $\widehat{f}_{i+1} = f_{i+1} + \delta \cdot (-1)^{i+1}$. **Шестой параграф** посвящен построению областей устойчивсти для жестких ИАУ и ИАУ содержащих быстроосцилирующие компоненты. Получено, что методы второго и третьего порядков имеют неограниченные области устойчисвости и применимы как для жестких ИАУ, так и для ИАУ содержащих быстроосцилирующие компоненты. А методы четвертого, пятого и шестого порядков имеют ограниченные области устойчивости и требуют мелкого шага интегрирования. В **седьмом параграфе** обсуждается возможность численного решения линейных ИАУ индекса 2. А именно, предлагается модифицировать разработанные ММ следующим образом, по экстрополяционной формуле находить не только x_{i+1}, а все первое слагаемое:

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j A_{i-j} x_{i-j} + h \sum_{l=0}^{i} \omega_{i+1,l} K_{i+1,l} x_l = f_{i+1}, \; i = k, k+1, \cdots, N-1.$$

Третья глава посвящена численному решению ИАУ со слабой особенностью в ядре (ИАУ типа Абеля). В **первом параграфе** обсуждаются сложности связанные с исследованием ИАУ типа Абеля.

Во **втором параграфе** описана схема построения ММ для ИАУ типа Абеля.

Рассмотрим ИАУ типа Абеля

$$\begin{gathered} A(t)x(t) + \int_0^t (t-s)^{-a} K(t,s) x(s) ds = f(t), \\ 0 \le s \le t \le 1, 0 < a < 1, det A(t) \equiv 0, \end{gathered} \tag{7}$$

где $A(t)$ и $K(t,s)$ — матрицы размерности $(n \times n)$, $f(t)$ — $n-$ мерная известная вектор-функция, а $x(t)$ – $n-$ мерная искомая вектор-функция. Предполагается, что элементы $A(t)$, $K(t,s)$, $f(t)$ обладают необходимой степенью гладкости.

Зададим на отрезке $[0,1]$ равномерную сетку $t_i = ih, i = 1,2,\ldots,N, h = \frac{1}{N}$, введем обозначения $A_i = A(t_i), K_{i,j} = K(t_i,t_j), f_i = f(t_i)$, $x_i \approx x(t_i)$.

Предлагаемые многошаговые методы будут иметь вид

$$A_{i+1}\sum_{j=0}^{k}\alpha_j x_{i-j} + \sum_{l=0}^{i}\omega_{i+1,l}K_{i+1,l}x_l = f_{i+1},\ i = k,k+1,\ldots,N-1, \tag{8}$$

где коэффициенты α_j приведены выше, а коэффициенты $\omega_{i+1,l}$ будем вычислять следующим образом.

Для заданной функции $g(t)$

$$\int\limits_0^{t_{i+1}}(t-s)^{-a}g(\tau)d\tau = \int\limits_0^{t_{k+1}}(t-s)^{-a}g(\tau)d\tau + \sum_{j=k+1}^{i}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}(t-s)^{-a}g(\tau)d\tau \approx$$

$$\int\limits_0^{t_{k+1}}(t_{i+1}-s)^{-a}L^0_{k+1}(g_0,g_1,...,g_k,\tau)d\tau +$$

$$\sum_{j=k+1}^{i}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}(t_{i+1}-s)^{-a}L^j_{k+1}(g_{j-k},g_{j-k+1},...,g_j,\tau)d\tau =$$

$$= \sum_{l=0}^{i}\omega_{i+1,l}g_l, \tag{9}$$

где $L^j_{k+1}(g_{j-k},g_{j-k+1},...,g_j,t)$– интерполяционный полином степени k, проходящий через точки $(g_{j-k},t_{j-k}),(g_{j-k+1},t_{j-k+1}),...,(g_j,t_j),\ j = k+1,k+2,\ldots,i$.

Например, при $k = 0$ получим метод

$$A_{i+1}x_i + \sum_{l=0}^{i}\omega_{i+1,l}K_{i+1,l}x_l = f_{i+1},$$

с весами

$$\omega_{i+1,l} = \frac{((i+1-l)h)^{1-a}}{1-a} - \frac{((i-l)h)^{1-a}}{1-a}.$$

Далее выпишем веса для $k=1$. Обозначим:

$$D_{0,i}=\frac{((i-1)h)^{1-a}}{1-a}+\frac{((i+1)h)^{1-a}}{1-a}+\frac{((i-1)h)^{2-a}}{h(1-a)(2-a)}-\frac{((i+1)h)^{2-a}}{h(1-a)(2-a)},$$

$$D_{1,i}=-2\frac{((i-1)h)^{1-a}}{1-a}-\frac{((i-1)h)^{2-a}}{h(1-a)(2-a)}+\frac{((i+1)h)^{2-a}}{h(1-a)(2-a)},$$

$$D_{2,i-j}=\frac{((i-j)h)^{1-a}}{1-a}+\frac{((i-j)h)^{2-a}}{h(1-a)(2-a)}-\frac{((i+1-j)h)^{2-a}}{h(1-a)(2-a)},$$

$$D_{3,i-j}=-2\frac{((i-j)h)^{1-a}}{1-a}+\frac{((i+1-j)h)^{1-a}}{1-a}-\frac{((i-j)h)^{2-a}}{h(1-a)(2-a)}+\frac{((i+1-j)h)^{2-a}}{h(1-a)(2-a)}.$$

Тогда веса имеют следующий вид:

$$\omega_{i+1,0}=D_{0,i}, i=1,2,...,N,$$

$$\omega_{i+1,1}=D_{1,i}, i=1,\ \ \omega_{i+1,1}=D_{1,i}+D_{2,i-j}|_{j=2}, i=2,3,...,N,$$

$$\omega_{i+1,l}=D_{3,i-j}|_{j=l}+D_{2,i-j}|_{j=l+1}, i=2,3,...,N, l=2,...,i-1,$$

$$\omega_{i+1,i}=D_{3,i-j}|_{j=i}, i=2,3,...,N.$$

Веса для $k=2,3,4,5$ не приведены из-за громозкости формул.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Резюмируя вышесказанное, можно сделать вывод, что в диссертационной работе впервые предложены и обоснованы многошаговые численные методы высокого порядка для интегро-алгебраических уравнений индекса один. Результаты могут быть рекомендованы для применения в Институте систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Институте вычислительного моделирования СО РАН, Институте динамики систем и теории управления СО РАН при решении задач возникающих в теории гидравлических и электрических цепей, при моделировании химических реакций.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в журналах из перечня ВАК

1. Будникова О.С., Булатов М.В. Численное решение интегро-алгебраических уравнений многошаговыми методами//Журнал вычислительной математики и математической физики. - Москва: МАИК «Наука», 2012. – Т. 52. – № 5. – С. 829–839

2. Булатов М.В., Будникова О.С. Исследование многошаговых методов для интегро-алгебраических уравнений: построение областей устойчивости//Журнал вычислительной математики и математической физики. - Москва: МАИК «Наука», 2013. – Т. 7 – С. 16–27.

3. Булатов М.В., Будникова О.С. Об устойчивых алгоритмах численного решения интегро-алгебраических уравнений//Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2013. – Т. 6. – №4 – С. 5–14.

Публикации в других научных изданиях

1. Будникова О.С. О модифицированных многошаговых методах для численного решения линейных интегро-алгебраических уравнений индекса два//Журнал Средневолжского математического общества - 2014.-Т.16.-№1.-С.45-54.

2. Будникова О.С. О численном решении интегро-алгебраических уравнений типа Абеля//Материалы конференции «Ляпуновских чтения - 2013», г. Иркутск, 9–11 декабря 2013 г. – С. 9

3. Будникова О.С., Мачхина М.Н. О численном решении интегральных и интегро-алгебраических уравнений//Современные проблемы обучения математике: материалы VI Всероссийской научно-практической конференции учителей и преподавателей математики. – Иркутск, Вост.-Сиб. Гос. академ. образов., 2013. – С. 220-226.

4. Булатов М.В., Будникова О.С. Исследование многошаговых методов для интегро-алгебраических уравнений//Тезисы докладов II Российско-монгольской конференции молодых ученых по математическому моделированию, вычислительно-информационным технологиям и управлению (Иркутск (Россия) – Ханх (Монголия), 25 июня-1 июля 2013г.). – Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН, 2013. – С. 17

5. Булатов М.В., Будникова О.С., Pishbin S. Исследование устойчивости многошаговых методов для интегро-алгебраических уравнений//Секция 1. Аналитическая механика (Казань, 12–16 июня 2012 г.). «Аналитическая механика, устойчивость и управление». Труды X Международной Четаевской конференции. – Казань: КАИ им. А.Н. Туполева, 2012. – С. 72–80.

6. Булатов М.В., Будникова О.С. Многошаговые методы для численного решения интегро-алгебраических уравнений//Нелинейный анализ и экстремальные задачи: Тезисы III Международной школы-семинара. – Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН, 2012. – С.13

7. Булатов М.В., Будникова О.С. Многошаговые методы для численного решения интегро-алгебраических уравнений//Обратные и некорректные задачи математической физики, посвященная 80-летию со дня рождения академика М. М. Лаврентьева: Материалы Международной конференции. – Новосибирск, 2012. – С. 177

8. Булатов М.В., Будникова О.С. Численное решение интегро-алгебраических уравнений многошаговыми методами//Российско-монгольская конференция молодых ученых по математическому моделированию, вычислительно-информационным технологиям и управлению: Тез.докл. – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2011. – С.14.

9. Budnikova O.S. On one class of multistep methods for numerical solution of integral algebraic equations//Abstracts of International seminar «Numerical solution of integral and differential equations»- July 15-20, 2014. -Lake Baikal. -P.2.

10. Bulatov M.V., Budnikova O.S. Numerical solution of integro-algebraic equations by multistep methods//Book of Abstracts of International Conference on Scientific Computation And Differential Equations (SciCADE 2013), September, 16-20 2013, Valladolid, Spain, Universidad de Valladolid. – P.115.

11. Bulatov M.V., Budnikova O.S. Numerical Solution of Integro-algebraic Equations of Multistep Methods//5th International Conference on High Performance Scientific Computing: Modeling, Simulation and Optimization of Complex Processes. – Hanoi, Vietnam, 2012. – P. 45

12. Bulatov M.V., Budnikova O.S. Numerical solution of integral-algebraic equations with a weakly singular kernel by multistep methods//Abstracts of V Congress of the Turkic World Mathematicians (Kyrgyzstan, Bulan-Sogottu, 5-7 June, 2014)-Bishkek: Mathematical Society of Kyrgyz, 2014.-P. 100.