

На правах рукописи

Писарев Игорь Викторович

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ
ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ СО СНЕСЕНИЕМ ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ НА
ИЗМЕНЕННУЮ ГРАНИЦУ**

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва - 2015

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Орловский государственный университет» на кафедре информатики

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор,
Сетуха Алексей Викторович

Официальные оппоненты:

Самохин Александр Борисович

доктор физико-математических наук, профессор,
Московский государственный технический университет
радиотехники, электроники и автоматики (МИРЭА),
заведующий кафедрой

Крутицкий Павел Александрович,

кандидат физико-математических наук, доцент, Институт
прикладной математики им. Келдыша, старший научный
сотрудник

Ведущая организация:

**Московский государственный технический университет
имени Н.Э.Баумана**

Защита состоится «___» _____ 2015 г. в ___ час.
на заседании диссертационного совета Д 501.002.09 при Московском
государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу:
119991, г. Москва, Ленинские горы, д.1, стр. 4, НИВЦ МГУ, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке МГУ имени
М.В. Ломоносова (Ломоносовский проспект, 27), и на сайте <http://srcc.msu.ru/>

Автореферат разослан «___» _____ 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Суворов Владимир Викторович

Общая характеристика работы

Объект исследования и актуальность темы. Метод граничных интегральных уравнений является одним из эффективных методов решения краевых задач. В частности, аппарат граничных интегральных уравнений лежит в основе моделирования потенциального обтекания тел несжимаемой жидкостью панельными (вихревыми) методами, которые широко используются в прикладной аэродинамике. В диссертации рассмотрен ряд трехмерных краевых задач для уравнения Лапласа, возникающих в аэродинамике, в которых целесообразно осуществить аппроксимацию формы граничной поверхности некоторой новой поверхностью. При этом ставится новая краевая задача на такой измененной поверхности, причем, приближенный учет первоначальной формы осуществляется за счет постановки специфических граничных условий. В свою очередь такая краевая задача сводится к интегральным уравнениям на новой граничной поверхности.

Так при применении метода граничных интегральных уравнений к краевым задачам вне тел малой толщины возникает следующая проблема. При решении задачи возникают граничные интегральные уравнения на замкнутой поверхности, которые вырождаются при стремлении толщины этого тела к нулю. При численном решении необходимо использовать очень мелкие разбиения поверхности, в которых размер ячеек должен быть много меньше толщины тела и обеспечивать аппроксимацию кромок тела малого радиуса. Замена такого тела тонким экраном позволяет избавиться от этой трудности, получив интегральные уравнения, в которые никак ни входит толщина тела. Такая задача имеет существенно меньшую вычислительную сложность. Однако, полное пренебрежение толщиной объекта не всегда позволяет в полной мере получить все необходимые его характеристики, теряются существенные свойства получаемого решения.

Такая ситуация имеет место в аэродинамике крыльев и других несущих поверхностей летательных аппаратов, где замена крыла бесконечно тонким

экраном позволяет рассчитать некоторые суммарные силы и моменты, но не позволяет получить распределение давления по поверхности крыла.

Для плоских задач аэродинамики известен метод учета реальной формы профиля крыла за счет снесения граничного условия на среднюю линию профиля, основанный на нанесении на эту линию дополнительного слоя источников. При этом задача об обтекании профиля сводится к системе двух одномерных сингулярных интегральных уравнений. Указанный подход применялся и при решении трехмерных задач об обтекании крыла конечного размаха, но с привлечением гипотезы плоских сечений.

В настоящей диссертации указанный подход со снесением граничных условий применен к решению полностью трехмерной краевой задачи Неймана для уравнения Лапласа. При этом тонкое тело заменяется серединой поверхностью, и решается краевая задача для уравнения Лапласа вне этой поверхности, на которой ставятся граничные условия на градиент неизвестной функции, причем правые части в этих условиях неодинаковые на различных сторонах поверхности. При отыскании решения в виде суммы потенциалов простого и двойного слоев возникает система интегро-дифференциальных уравнений, которая содержит интегральные операторы с сингулярными и сильносингулярными поверхностными интегралами, а также вне интегральные члены, содержащие поверхностный градиент неизвестной плотности потенциала двойного слоя. Для решения такой задачи построена численная схема, основанная на дискретизации граничных интегральных уравнений. Данная идея приложена к краевой задаче для уравнения Лапласа, возникающей в линейной теории крыла конечного размаха.

Другой класс краевых задач, где также возникает необходимость замены исходной граничной поверхности на другую, более удобную поверхность, представляют краевые задачи в области над бесконечным слабоизогнутым экраном. В диссертации рассмотрена краевая задача Неймана в области, лежащей по одну сторону от неограниченной поверхности, которая вне некоторого шара совпадает с некоторой плоскостью. Если неровность эк-

рана лежит по одну сторону от этой плоскости, то такую задачу можно решать методом отражений, и она равносильна краевой задаче Неймана вне тонкого тела с плоскостью симметрии. Для такого случая удалось доказать однозначную разрешимость интегральных уравнений, возникающего после снесения граничных условий, и получить аналитические оценки, связывающие решение краевой задачи с решением исходной задачи.

Таким образом, **объектом** исследования в настоящей работе являются трехмерные краевые задачи для уравнения Лапласа, возникающие при моделировании течений идеальной несжимаемой жидкости. **Предметом** исследования является разработка эффективных вычислительных моделей для решения краевых задач методами граничных интегральных уравнений.

Целью диссертационной работы являются разработка, программная реализация и верификация численного метода решения краевых задач для уравнения Лапласа, возникающих при моделировании обтекания тел идеальной несжимаемой жидкостью, со снесением граничных условий на новую граничную поверхность с приближенным учетом первоначальной формы поверхности.

Для достижения указанной цели в работе решены задачи:

1. Разработана численная схема решения внешней краевой задачи Неймана вне телесного объекта малой толщины, основанная на аппроксимации объекта срединной поверхностью и с приближенным учетом первоначальной формы объекта за счет снесения граничных условий на эту поверхность.

2. Построен метод для приближенного решения краевой задачи Неймана для уравнения Лапласа вне тел, расположенных на слабоизогнутом экране, с аппроксимацией экрана плоской поверхностью и приближенным учетом неровности экрана за счет постановки соответствующего граничного условия на этой плоской поверхности.

3. Построена численная схема решения линейной задачи об обтекании крыла конечного размаха с заменой крыла срединной поверхностью и учетом телесности крыла за счет постановки соответствующих граничных условий на этой поверхности.

Научная новизна работы состоит в том, что известный ранее подход к решению двумерных краевых задач об обтекании профилей крыльев идеальной несжимаемой жидкостью с приближенным учетом телесности профиля, основанный на снесении граничных условий на срединную линию, распространен на трехмерные краевые задачи. Построены новые численные схемы приближенного решения внешней краевой задачи Неймана вне тела малой толщины и краевой задачи линейной теории крыла конечного размаха, основанные на сведении задачи к системе двумерных граничных интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными интегралами. Также, указанный подход применен к новому классу задач о течениях над бесконечным слабоизогнутым экраном, где получены теоретические оценки, связывающие решения исходной задачи и задачи со снесенными граничными условиями, и построена численная схема решения задачи со снесенными условиями.

Научная и практическая значимость работы состоит в том, что разработанный подход и основанные на нем численные алгоритмы могут быть применены при моделировании процессов вне тел малой конечной толщины. Так, разработанные методы могут быть применены в задачах аэродинамики крыльев, воздушных винтов, планирующих парашютов и паропланов, роторов ветроустановок и турбомашин в рамках панельных и вихревых методов. Алгоритмы решения краевой задачи Неймана вне тел, расположенных на бесконечном слабоизогнутом экране, могут быть применены при моделировании обтекания тел, расположенных на изогнутой поверхности, вихревыми методами.

Достоверность разработанных численных алгоритмов подтверждается: использованием строгого математического аппарата, доказательством разрешимости возникающих при решении задачи со снесенными граничными условиями интегральных уравнений и близости решения этой задачи к решению исходной задачи Неймана на слабоизогнутом экране; сравнением численных решений, получаемых по предложенным моделям со снесением граничного условия и приближенным учетом формы граничной

поверхности, с численными решениями, получаемыми для точной исходной формы поверхности; сравнением численных решений краевой задачи обтекании крыла конечного размаха с известными аналитическими решениями, численными результатами других авторов, данными физического эксперимента.

На защиту выносятся следующие результаты и положения:

1. Разработка метода моделирования обтекания тел малой толщины, при котором задача сводится к системе сингулярных граничных интегродифференциальных уравнений, записанных на срединной поверхности тела и обеспечивающих приближенное выполнение граничных условий на реальной поверхности тела;
2. Разработка и тестирование вычислительного метода решения краевых задач с условием Неймана вне телесных объектов малой толщины с приближенным учетом телесности, основанного на численном решении системы интегродифференциальных уравнений, записанных на срединной поверхности;
3. Оценка погрешности приближенного решения краевой задачи Неймана на слабоизогнутом бесконечном экране, возникающего при снесении граничного условия на плоскость, аппроксимирующую экран, основанная на доказательстве разрешимости исходной и измененной краевых задач и полученных закономерностях зависимости их решений от формы экрана;
4. Реализация разработанной численной схемы решения краевых задач в виде комплекса программ для моделирования безвихревого обтекания тел малой толщины, моделирования течений над слабоизогнутыми экранами и решения линейных задач обтекания крыльев конечного размаха.

Апробация работы: Результаты работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и научных семинарах: Международные симпозиумы «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики», 2011, 2013 годы, Херсон; конференция «Ломоносовские чтения», МГУ, 2014, Москва; международная школа-семинар «Методы дискретных особенностей в задачах математической

физики», 2011 год, Орёл; семинары им. С.М. Белоцерковского, ЦАГИ, 2014 и 2015 г., Москва; семинары кафедры информатики Орловского государственного университета, 2011 и 2012 г., Орёл; научно-методический семинар кафедры прикладной математики МГТУ им. Н.Э.Баумана, МГТУ, 2015, Москва; семинар "Математические методы в естественных науках" кафедры математики физического факультета МГУ, Москва; семинар "Интегральные уравнения" каф. математической физики ф-та ВМК МГУ.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 5 научных работах, из них 3 работы (статьи [1-3]) опубликованы в журналах из перечня ВАК.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Общий объем 161 страница, библиографических ссылок 81.

Основное содержание работы

Во введении дается общая характеристика работы.

В первой главе рассматривается классическая задача Неймана для уравнения Лапласа в области Ω вне замкнутой поверхности $\Sigma = \partial\Omega$

$$\Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = f \text{ на } \Sigma \quad (1)$$

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$, с дополнительным условием $u(\mathbf{x}) \rightarrow 0$ при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$.

Рассмотрен случай, когда поверхность Σ ограничивает некоторое тело малой толщины (см. рис. 1). Считается, что поверхность Σ устроена следующим образом: имеется некоторая разомкнутая срединная поверхность Σ_0 , и для каждой точки $\mathbf{z} \in \Sigma_0$ определены точки

$$\mathbf{z}^{\pm}(\mathbf{z}) = \mathbf{z} \pm \lambda(\mathbf{z})\mathbf{n} / 2$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{z})$ - орт вектора нормали к поверхности Σ_0 , $\lambda(\mathbf{z}) \geq 0$ - гладкая функция, значения которой малы, обращаясь в 0 на краю поверхности Σ_0 . При этом множества точек $\mathbf{z}^+(\mathbf{z})$ и $\mathbf{z}^-(\mathbf{z})$ образуют поверхности Σ^+ и Σ^- , объединение которых и есть замкнутая поверхность Σ .

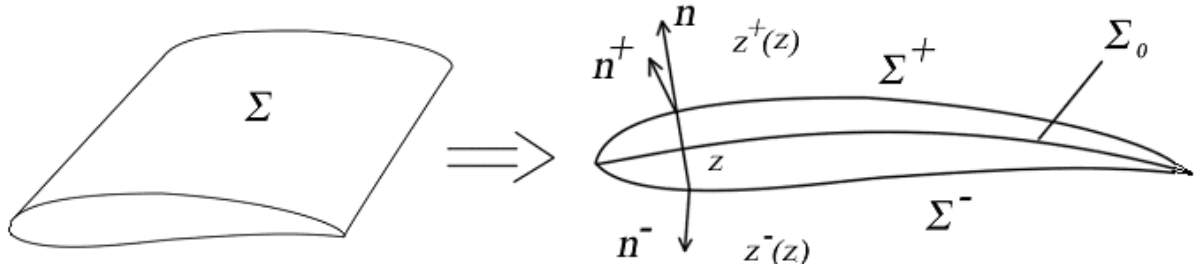


Рис. 1. Снесение граничного условия на срединную поверхность.

Для отыскания приближенного решения такой задачи, осуществлена ее замена на следующую задачу в области Ω_0 вне поверхности (экрана) Σ_0 :

$$\Delta u = 0 \text{ в } \Omega_0; \quad (\text{grad } u)^+ \mathbf{n}^+ = f^+, (\text{grad } u)^- \mathbf{n}^- = f^- \text{ на } \Sigma_0 \quad (2)$$

где \mathbf{n}^+ и \mathbf{n}^- - векторы нормали к исходной поверхности Σ в точках $\mathbf{z}^+(\mathbf{x})$ и $\mathbf{z}^-(\mathbf{x})$ соответственно, $\mathbf{x} \in \Sigma_0$, $f^+(\mathbf{x}) = f(\mathbf{z}^+(\mathbf{x}))$, $f^-(\mathbf{x}) = f(\mathbf{z}^-(\mathbf{x}))$.

Решение краевой задачи (2) ищется в виде суммы потенциалов простого и двойного слоев

$$u = V[\Sigma_0, \mu] + U[\Sigma_0, g], \text{ где } V[\Sigma, \mu](\mathbf{x}) = \int_{\Sigma} \mu(\mathbf{y}) F(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\sigma_y,$$

$$U[\Sigma, g](\mathbf{x}) = \int_{\Sigma} g(\mathbf{y}) \frac{\partial F(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial n_y} d\sigma_y, \quad F(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}.$$

Для неизвестных плотностей потенциалов – функций μ и g , из граничных условий возникает система из двух интегро-дифференциальных уравнений

$$\int_{\Sigma_0} g(\mathbf{y}) \frac{\partial^2 F(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial n_x^{\pm} \partial n_y} d\sigma_y + \int_{\Sigma_0} \mu(\mathbf{y}) \frac{\partial F(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial n_x^{\pm}} d\sigma_y \mp \frac{1}{2} \mu(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}^{\pm}(\mathbf{x})) \pm \frac{1}{2} [\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}) \times \mathbf{n}(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{n}^{\pm}(\mathbf{x}) = f^{\pm}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Sigma_0, \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}) = \mathbf{n}(\mathbf{x}) \times \text{Grad } g(\mathbf{x}) \quad (3)$$

где первое уравнение соответствует верхней расстановке знаков, второе – нижней, Grad - поверхностный градиент, интегралы, содержащие функцию g , понимаются в смысле конечного значения по Адамару, интегралы, содержащие функцию μ , понимаются в смысле главного значения.

При численном решении задачи осуществляется регулярное отмеченное разбиение поверхности Σ_0 на систему четырехугольных ячеек σ_i , $i = 1, \dots, n$, с выбранными на них точками коллокации $\mathbf{x}_i \in \sigma_i$ (могут использо-

ваться и треугольные ячейки, рассматриваемые как четырехугольники, у которых одна из вершин сдвоена). Определяются векторы нормали $\mathbf{n}_i = \mathbf{n}(\mathbf{x}_i)$ к поверхности Σ_0 , \mathbf{n}_i^+ и \mathbf{n}_i^- - векторы нормали к исходной поверхности Σ в точках $z^+(\mathbf{x}_i)$ и $z^-(\mathbf{x}_i)$ соответственно, и площади ячеек разбиения s_i .

Численное решение задачи (2) ищется в виде

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n g_j \int_{\sigma_j} \frac{\partial F(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{\partial n_y} d\sigma_y + \sum_{j=1}^n \mu_j \int_{\sigma_j} F(\mathbf{x}-\mathbf{y}) d\sigma_y.$$

Метод коллокации приводит к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^N a_{ij}^{\pm} g_j + \sum_{j=1}^n b_{ij}^{\pm} \mu_j \pm \frac{1}{2} [\gamma_i \times \mathbf{n}_i] \mathbf{n}_i^{\pm} \mp \frac{1}{2} \mu_i \mathbf{n}_i \mathbf{n}_i^{\pm} = f_i^{\pm}, \quad i=1, \dots, n, \quad (4)$$

в которой $N = n$, знаки берутся соответственно, $f_i^{\pm} = -\mathbf{w}_{\infty} \mathbf{n}_i^{\pm}$,

$$a_{ij}^{\pm} = \mathbf{V}[\sigma_j](\mathbf{x}_i) \mathbf{n}_i^{\pm}, \quad b_{ij}^{\pm} = \mathbf{n}_i^{\pm} \int_{\sigma_j} \mathbf{V}_{\mu}(\mathbf{x}_i - \mathbf{y}) d\sigma_y, \quad i=1, \dots, n, \quad j=1, \dots, n,$$

$$\mathbf{V}_{\mu}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \text{grad}_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{y}-\mathbf{x}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3}, \quad \mathbf{V}[\sigma_j](\mathbf{x}) = \text{grad} \int_{\sigma_j} \frac{\partial F(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{\partial n_y} d\sigma_y, \quad (5)$$

интегралы в выражении для коэффициентов b_{ij}^{\pm} вычислялись приближенно по формуле прямоугольников (при этом осуществлялось дополнительное разбиение каждой из ячеек σ_j , $j=1, \dots, n$, и считалось, что $\mathbf{V}_{\mu}(\mathbf{x}-\mathbf{y})=0$ при $\mathbf{x}=\mathbf{y}$), векторы γ_i , $i=1, \dots, n$, определяются выражением, аппроксимирующим формулу для вектора γ из уравнений (3):

$$\gamma_i = (\Gamma_1^i + \Gamma_2^i + \Gamma_3^i + \Gamma_4^i) / s_i, \quad (6)$$

где $\Gamma_l^i = -(g_i - g_{j(l,i)}) \mathbf{r}_l / 2$, $l=1, 2, 3, 4$ - номера сторон ячейки σ_i , $j(l,i)$ номер соседней ячейки разбиения поверхности Σ_0 , граничащей с данной ячейкой σ_i по стороне с номером l (если такой ячейки нет, то $g_{j(l,i)}=0$), \mathbf{r}_l - вектор, лежащий на этой стороне в направлении положительного обхода границы ячейки. Известно, что интеграл во второй из формул (5) сводится к контурному интегралу по краю $\partial\sigma_j$ ячейки σ_j и, если $\partial\sigma_j$ есть ломаная линия, вычисляется аналитически.

Во второй главе осуществлено тестирование численной схемы решения задачи (1) со снесением граничного условия. Была взята поверхность Σ , образованная половинками эллипсоидов вращения с центрами в начале координат (ось вращения Ox_3), высоты верхнего и нижнего эллипсоидов взяты как $2H'$ и H' соответственно (рис. 2). Рассмотрены варианты, в которых относительная толщина тела $\bar{c} = H/D$ составляла 0.375, 0.15, 0.075, D - диаметр окружности, $H = 3H'$ - полная высота.

Рассмотрена задача (1) с правой частью $f = -\mathbf{w}_\infty \mathbf{n}$, где \mathbf{w}_∞ - заданный вектор. Задача описывает потенциальное обтекание тела с поверхностью Σ потоком идеальной несжимаемой жидкости, имеющим скорость \mathbf{w}_∞ на бесконечности, если искать поле скоростей жидкости в виде $\mathbf{w} = \mathbf{w}_\infty + \text{grad } u$.

Для сравнения решались численно исходная задача вне замкнутого тела, краевая задача Неймана вне срединной поверхности, рассматриваемой как тонкий экран (полная замена телесного тела тонкой поверхностью, на которой ставится граничное условие $(\partial u / \partial n)^\pm = -\mathbf{w}_\infty \mathbf{n}$), и предложенная задача со снесением граничного условия на срединную поверхность. Для каждой из трех постановок задачи сначала получены решения на различных сетках разбиения поверхности и проведен анализ поведения краевых значений потенциала, полученных численно при измельчении разбиения. Затем осуществлено сравнение результатов, получаемых по разным моделям.

В случае исходной краевой задачи вне замкнутого тела различие краевых значений, полученных на различных сетках, увеличивается при уменьшении толщины тела, наблюдается их нефизичное поведение вблизи краев тела. Модель со снесением граничного условия, наоборот, показывает тем более высокое согласование результатов, полученных на разных сетках (более высокую скорость сходимости), чем меньше толщина тела.

На рис.3 показаны распределения потенциала u вдоль линий, получаемых при сечении верхней и нижней частей поверхности Σ плоскостью $x_2 = 0$ для случая $\mathbf{w}_\infty = (1, 0, 0)$ для значений $\bar{c} = 0.125, 0.075$.

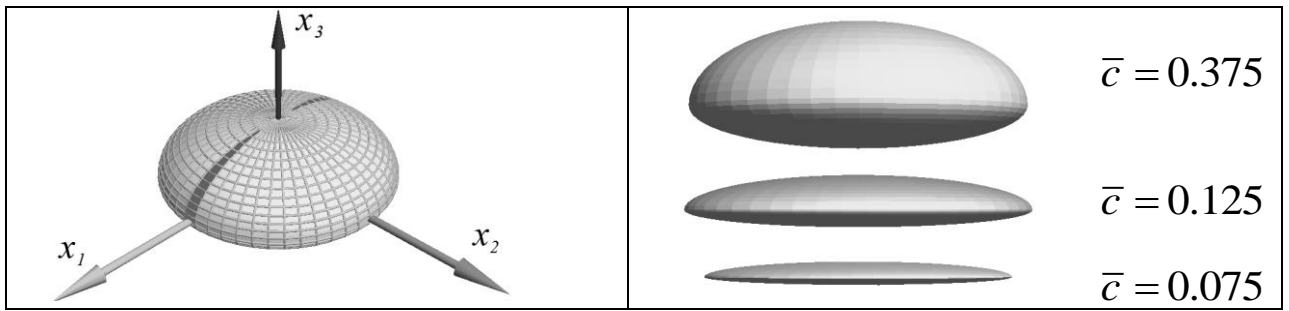


Рис. 2. Форма исследованных тел и расположение расчетного сечения.

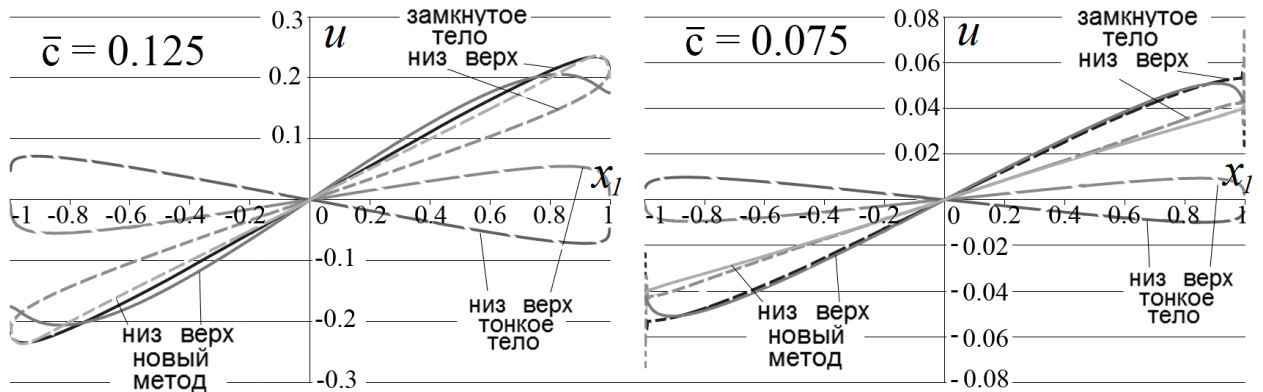


Рис. 3. Распределение потенциала по поверхности тела вдоль линии $x_2 = 0$.

Видно различие между решениями исходной задачи и задачи вне тонкого экрана, которое является существенным при обтекании с вектором w_∞ , направленным вдоль тела или под малым углом. Предложенная модель со снесением граничного условия на срединную поверхность позволяет получить согласующиеся с получаемыми для телесного объекта распределения краевых значений потенциала, причем, это согласование улучшается при уменьшении толщины объекта.

В третьей главе рассмотрена краевая задача Неймана для уравнения Лапласа над слабоизогнутым экраном. Пусть дано семейство поверхностей $L = L(h)$, задаваемых уравнением

$$x_3 = \psi_h(x_1, x_2), \quad \psi_h(x_1, x_2) = h\phi(x_1, x_2), \quad (7)$$

где $\phi(x_1, x_2) \in C^4(R^2)$ - некоторая фиксированная финитная функция, h - параметр, характеризующий степень изогнутости поверхности L . При этом на плоскости $\pi = Ox_1, x_2$ можно выделить участок π^* такой, что $\text{supp } \phi \subset \pi^*$ и пусть L^* - часть поверхности L , лежащая над участком π^* (рис. 4).

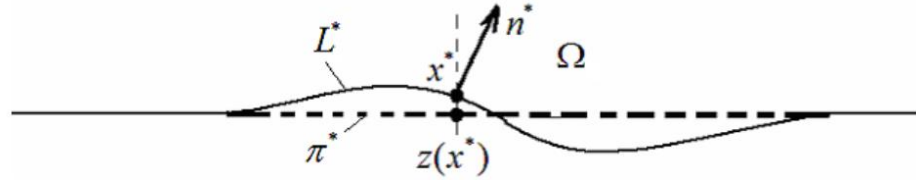


Рис. 4. Вид области решения задачи.

Рассматривается краевая задача (1) относительно неизвестной функции $u = u(\mathbf{x})$ в области Ω , лежащей выше поверхности L с границей $\Sigma = L$, где $L = L(h)$ - одна из поверхностей описанного семейства. Предполагается, что функция f является финитной, удовлетворяет условию $\text{supp } f \subset L^*$ и непрерывна по Гельдеру с показателем $\alpha \in (0,1]$. Ищется решение $u \in C^2[\Omega] \cap C^1[\bar{\Omega}]$, удовлетворяющее условию $u(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Решение задачи ищется в виде потенциала простого слоя $u = V[L, \mu]$, где, плотность $\mu(\mathbf{x})$ непрерывна по Гельдеру на поверхности L и функция $\mu(\mathbf{x})(1 + |\mathbf{x}|^2)$ ограничена. Для функции μ возникает интегральное уравнение:

$$-\frac{1}{2}\mu(\mathbf{x}) + \int_L \mu(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n_x} F(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\sigma_y = f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in L \quad (8)$$

Доказано, что существуют константы $h_0 > 0$ и C , зависящие только от функции ϕ из формул (7) и показателя α , такие, что при $h < h_0$:

1) уравнение (8), однозначно разрешимо и выполнены оценки:

$$|\mu(x)| \leq C \|f\|_{\alpha, L^*} (1 + |x|^2)^{-1}, |\mu(x) - f(x)| \leq Ch \text{ для всех } x \in L, \|\mu\|_{\alpha, L} \leq C \|f\|_{\alpha, L^*},$$

$$\text{где } \|\mu\|_{\alpha, L} = \sup_{\mathbf{x} \in L} |\mu(\mathbf{x})| + \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}} |\mu(\mathbf{x}) - \mu(\mathbf{y})| / |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\alpha;$$

2) Рассматриваемая задача (1) однозначно разрешима и

$$|u(\mathbf{x})| \leq C \|f\|_{\alpha, L^*} (1 + |\mathbf{x}|)^{-1}, |\text{grad } u(\mathbf{x})| \leq C \|f\|_{\alpha, L^*} (1 + |\mathbf{x}|^2)^{-1}, \mathbf{x} \in \Omega.$$

Далее в диссертации рассмотрена следующая краевая задача, возникающая при снесении граничного условия с криволинейной поверхности L на плоскость π . Пусть $\Omega^* = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in R^3 | x_3 > 0\}$, область, ограниченная плоскостью π . Рассматривается задача

$$\Delta u = 0 \text{ в } \Omega^*, \quad \frac{\partial u}{\partial n^*} = f_1 \text{ на } \partial\Omega^* = \pi, \quad u(x) \rightarrow 0 \text{ при } |x| \rightarrow \infty. \quad (9)$$

где $f_1(\mathbf{z}) = f_0(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in L$, $\mathbf{z} \in \pi$ - ортогональная проекция точки \mathbf{x} на плоскость π , $\mathbf{n}^*(\mathbf{z})$ - вектор нормали к поверхности L в точке $\mathbf{x} \in L$, проекция которой на плоскость π есть точка \mathbf{z} , ищется решение в классе $u \in C^2[\Omega^*] \cap C^1[\overline{\Omega^*}]$.

Доказано, что в случае, когда $f_1 \in C^3(\pi)$ существуют константы $h_0 > 0$ и C , зависящие только от функции ϕ из формул (7) и показателя α , такие, что при $h < h_0$ задачи (1) и (9) разрешимы и их решения - функции u_0 и u_1 соответственно, связаны оценкой:

$$|u_1(\mathbf{x}) - u_0(\mathbf{x})| \leq \frac{CNh}{1+|\mathbf{x}|}, \quad |\text{grad } u_1(\mathbf{x}) - \text{grad } u_0(\mathbf{x})| \leq \frac{CNh}{1+|\mathbf{x}|^2}, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

N - константа, ограничивающая по модулю функцию f_1 и ее частные производные вдоль плоскости π до 3-го порядка включительно.

При численном решении краевой задачи (9), не ограничивая общности, можем считать, что поверхность π^* есть прямоугольник. Осуществим разбиение этого прямоугольника на прямоугольные ячейки σ_i , $i = 1, \dots, N$, и на каждой ячейке возьмем точку коллокации $\mathbf{z}_i \in \sigma_i$ в ее центре, $i = 1, \dots, N$. Обозначим $\delta > 0$ - диаметр разбиения, s_j - площадь ячейки σ_j .

Приближенное решение задачи (9) и его градиент ищем в виде

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \mu_j s_j F(\mathbf{x} - \mathbf{z}_j), \quad \text{grad } \tilde{u}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \mu_j s_j \mathbf{V}_\mu(\mathbf{x} - \mathbf{z}_j) \quad \mathbf{x} \in \Omega^*, \quad (10)$$

функция \mathbf{V}_μ определена в формулах (5). При этом неизвестные μ_j , $j = 1, \dots, N$ (приближенные значения функции $\mu(\mathbf{x})$ в точках коллокации) ищем из системы линейных уравнений, аппроксимирующей уравнение (8).

К рассмотренной задаче сводится задача о потенциальном обтекании бесконечного слабоизогнутого экрана L потоком идеальной несжимаемой жидкости, имеющим на бесконечности скорость \mathbf{w}_∞ , параллельную плоскости π . Если поле скоростей искать в виде $\mathbf{w} = \mathbf{w}_\infty + \text{grad } u$, то для

неизвестного потенциала u и возникает краевая задача (1) с правой частью $f = -\mathbf{w}_\infty \mathbf{n}$ в граничном условии. Приближенное поле скоростей имеет вид : $\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_\infty + \text{grad} \tilde{u}(\mathbf{x})$, где $\text{grad} \tilde{u}(\mathbf{x})$ вычисляется по формуле (10).

Однако, формула (10) не работает в точках $\mathbf{x} \in \Omega$, у которых $x_3 < 0$, а также в точках $\mathbf{x} \in \Omega$, которые расположены близко к плоскости π . Поэтому, при $x_3 < \delta$, вектор $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ строился по формуле $\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \alpha \mathbf{w}_1 + \beta \mathbf{w}_2$, где $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}(\mathbf{x}')$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}(\mathbf{x}'')$, $\mathbf{w}(\mathbf{x}')$ и $\mathbf{w}(\mathbf{x}'')$ вычисляются с использованием формулы (10) в точках $\mathbf{x}' = (x_1, x_2, 2\delta)$, $\mathbf{x}'' = (x_1, x_2, \delta)$, $\alpha = -(\delta - x_3)/\delta$, $\beta = 1 - \alpha$. При этом исключается вычисление скорости по формуле (10) на расстояниях меньших δ от плоскости π , а также ниже этой плоскости.

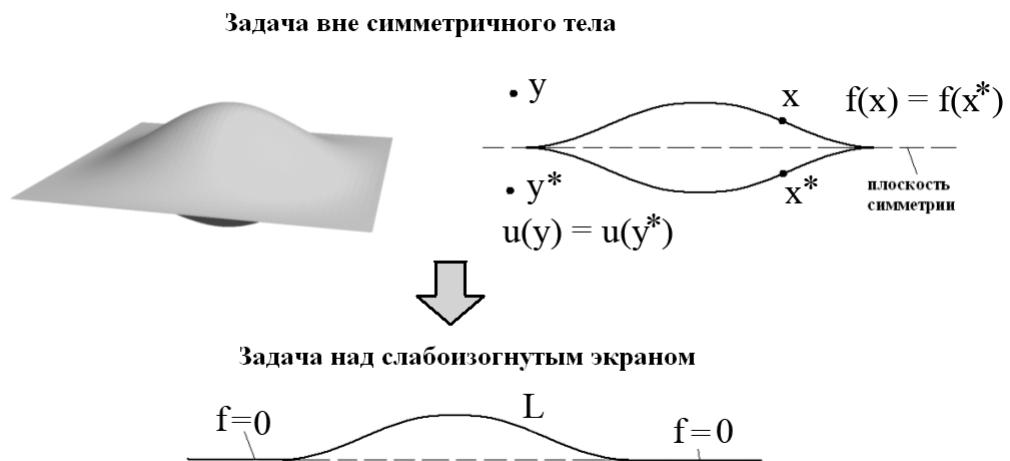


Рис. 5. Задачи вне симметричного тела и над слабоизогнутым экраном.

Заметим, так же, что рассмотренная задача связана с краевой задачей Неймана, рассмотренной в главе 1 (рис.5). Пусть функция $\psi_h(x_1, x_2)$, задающая форму экрана удовлетворяет условию $\psi_h(x_1, x_2) > 0$ при $(x_1, x_2) \in D$, где D - область на плоскости π , такая, что ее замыкание есть участок π^* . При этом $\psi_h(x_1, x_2) = 0$, вне области D . Отразив поверхность L^* относительно плоскости $x_2 = 0$, получим замкнутую симметричную поверхность Σ . При этом исходная задача сводится к краевой задаче (1) в области вне поверхности Σ , если доопределить правую часть в граничном условии $f(x) = f(x^*)$ при x и x^* , симметричных относительно плоскости π .

Было проведено тестирование разработанной численной схемы на примере задачи об обтекании симметричного тела потоком идеальной несжимаемой жидкости со скоростью \mathbf{w}_∞ , параллельной плоскости симметрии (такая задача равносильна обтеканию слабоизогнутого экрана, рис.5). При сравнении с численными решениями задачи вне исходной поверхности отмечена близость краевых значений, как потенциала, так и его градиента, по всей поверхности, включая окрестности краев.

В четвертой главе рассматривается задача о потенциальном обтекании идеальной несжимаемой жидкостью крыла конечного размаха.

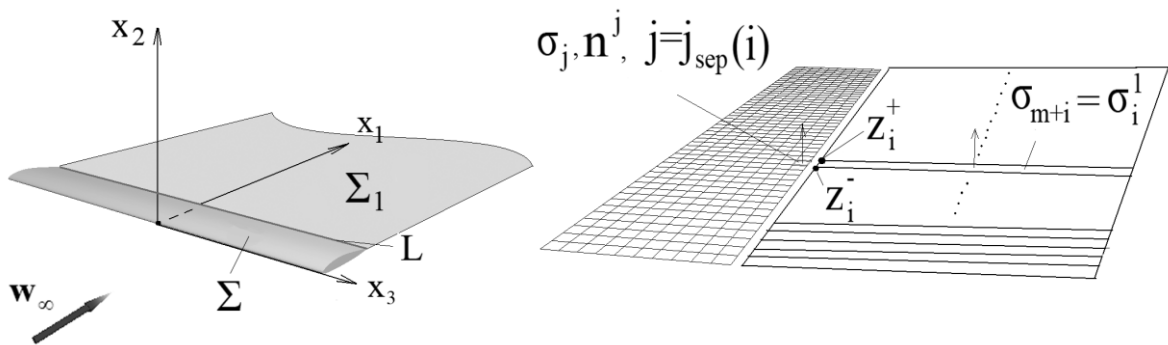


Рис. 6. Схема крыла и его аппроксимация.

Пусть Σ - поверхность крыла, которая предполагается замкнутой (рис. 6). Введем правую декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$, в которой Ox_1x_2 есть вертикальная плоскость симметрии крыла, ось Ox_1 направлена от передней кромки к задней, ось Ox_2 направлена вверх, \mathbf{e}_i - орт оси $Ox_i, i = 1, \dots, 3$. На задней кромке крыла задается линия отрыва L и предполагается, что на этой линии образуется вихревой след, который моделируется заданной поверхностью Σ_1 . Предполагается, что поверхность Σ_1 образована всевозможными лучами вида $[MN)$, где $M \in L, \overline{MN} = \alpha \mathbf{e}_1, \alpha \geq 0$, и $\Sigma_1 \cap \Sigma = L$.

Обозначим Ω - область пространства вне поверхностей Σ и Σ_1 , $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x})$ - орт нормали к поверхностям Σ и Σ_1 (\mathbf{n} - внешняя нормаль на поверхности на поверхности Σ , $\mathbf{n} \mathbf{e}_2 \geq 0$ при $\mathbf{x} \in \Sigma_1$). Поле скоростей ищется в виде $\mathbf{w} = \mathbf{w}_\infty + \text{grad} u$, где \mathbf{w}_∞ - заданный вектор скорости набегающего потока, потенциал u должен являться решением следующей краевой задачи:

$$\Delta u = 0 \text{ в области } \Omega, \frac{\partial u}{\partial n} = f \text{ на } \Sigma, \frac{\partial(u^+ - u^-)}{\partial x_1} = 0, \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^+ = \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^- \text{ на } \Sigma_1$$

с правой частью $f = -\mathbf{w}_\infty \mathbf{n}$, при условиях ограниченности потенциала в области Ω и условии на бесконечности $u(\mathbf{x}) \rightarrow 0$ при $\rho(\mathbf{x}, \partial\Omega) \rightarrow \infty$.

Для данной задачи формулируется метод снесения граничных условий на срединную поверхность. Здесь, как и в главе 1, считаем, что поверхность Σ образована точками \mathbf{z}^\pm , вокруг разомкнутой срединной поверхности Σ_0 (рис. 1). Пусть Ω_0 - область вне разомкнутых поверхностей Σ_0 и Σ_1 (мы по-прежнему считаем, что эти поверхности стыкуются по линии отрыва L на задней кромке крыла). Вместо поставленной задачи для потенциала u рассматриваем новую задачу в области Ω_0 :

$$\Delta u = 0 \text{ в области } \Omega_0, (\nabla u)^+ \mathbf{n}^+ = f^+, (\nabla u)^- \mathbf{n}^- = f^- \text{ на поверхности } \Sigma_0,$$

где $f^\pm = -\mathbf{w}_\infty \mathbf{n}^\pm$, $\mathbf{n}^\pm(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in \Sigma_0$ - орты вектора нормали к исходной поверхности Σ в точках $\mathbf{z}^\pm \in \Sigma^\pm$ соответственно. На поверхности Σ_1 и на бесконечности ставятся те же условия, что и в исходной задаче.

Решение такой задачи ищем в виде

$$u(\mathbf{x}) = U[\Sigma_0, g](\mathbf{x}) + V[\Sigma_0, \mu](\mathbf{x}) + U[\Sigma_1, g_1](\mathbf{x}),$$

для функций g и g_1 возникают следующие соотношения и уравнения:

$$g_1(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \text{ при } \mathbf{x} \in L, \partial g_1 / \partial x_1 = 0 \text{ на поверхности } \Sigma_1,$$

$$\int_{\Sigma_0} g(\mathbf{y}) \frac{\partial^2 F(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial n_x^\pm \partial n_y} dy + \int_{\Sigma_1} g_1(\mathbf{y}) \frac{\partial^2 F(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial n_x^\pm \partial n_y} dy + \int_{\Sigma_0} \mu(\mathbf{y}) \frac{\partial F(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial n_x^\pm} dy \mp \frac{1}{2} \mu(\mathbf{x})(\mathbf{n}(\mathbf{x})\mathbf{n}^\pm(\mathbf{x})) \pm \frac{1}{2} [\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}) \times \mathbf{n}(\mathbf{x})] \mathbf{n}^\pm(\mathbf{x}) = f^\pm, \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}) = \mathbf{n}(\mathbf{x}) \times \text{Grad } g(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Sigma_0.$$

Для численного решения осуществляем отмеченное разбиение срединной поверхности Σ_0 на систему ячеек σ_i , $i=1, \dots, n$, с выбранными на них точками коллокации $\mathbf{x}_i \in \Sigma$ и ортами вектора нормали \mathbf{n}_i . Кроме того, осуществляем разбиение поверхности вихревого следа Σ_1 на систему ячеек σ_{n+i} , $i=1, \dots, m$ так, что каждая такая ячейка есть полоса, ограниченная

отрезком на линии отрыва L , являющимся стороной некоторой ячейки σ_j разбиения поверхности с номером $j = j_{sep}(i)$, и лучами, начинающимися в концах этого отрезка и уходящими на бесконечность в направлении оси Ox_1 (рис. 6). Приближенный потенциал ищется в виде

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n+m} g_j \int_{\sigma_j} \frac{\partial F(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{\partial n_y} d\sigma_y + \sum_{j=1}^n \mu_j \int_{\sigma_j} F(\mathbf{x}-\mathbf{y}) d\sigma_y$$

и для нахождения неизвестных значений g_j , $j = 1, \dots, n+m$ и μ_i , $i = 1, \dots, n$ решается система уравнений (4) с $N = n+m$, дополненная уравнениями

$$g_{n+i} = g_{j_{sep}(i)}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Для оценки достоверности получаемых результатов были проведены расчеты обтекания крыльев большого удлинения с профилем Жуковского и классическим симметричным профилем НАСА-0012. Были получены распределения коэффициента давления по верхней и нижней поверхности крыла в срединном вертикальном сечении крыла и осуществлено сравнение полученных распределений с известными распределениями, получаемыми при решении плоской задачи об обтекании соответствующего профиля идеальной несжимаемой жидкостью (с пересчетом местного угла атаки по теории Прандтля). При этом для профиля Жуковского бралось аналитическое решение, а для профиля НАСА-0012 известное численное решение, полученное методом приближенного конформного отображения.

Также была решена численно задача об обтекании крыла конечного размаха с удлинением $\lambda = 5$ и профилем серии В (ЦАГИ) толщиной 12%. На основании полученного распределения скорости по поверхности крыла рассчитаны распределения коэффициента давления C_p по поверхности крыла в срединном вертикальном сечении, а также коэффициент нормальной силы крыла C_y ($C_p = (p - p_\infty)/q$, $q = \rho \mathbf{w}_\infty^2 / 2$, $C_y = (\mathbf{F} \mathbf{e}_2) / (qS)$, где ρ - плотность воздуха, p и p_∞ - давление в рассматриваемой точке и на бесконечности соответственно, \mathbf{F} - вектор аэродинамической силы, S - площадь срединной

поверхности крыла). На рис. 7. приведены указанные результаты расчета в сравнении с аналогичными данными, полученными автором, на основании расчета обтекания панельным методом телесной конфигурации крыла, тонкой срединной поверхности (без учета телесности), а также с известными экспериментальными данными для указанного крыла.

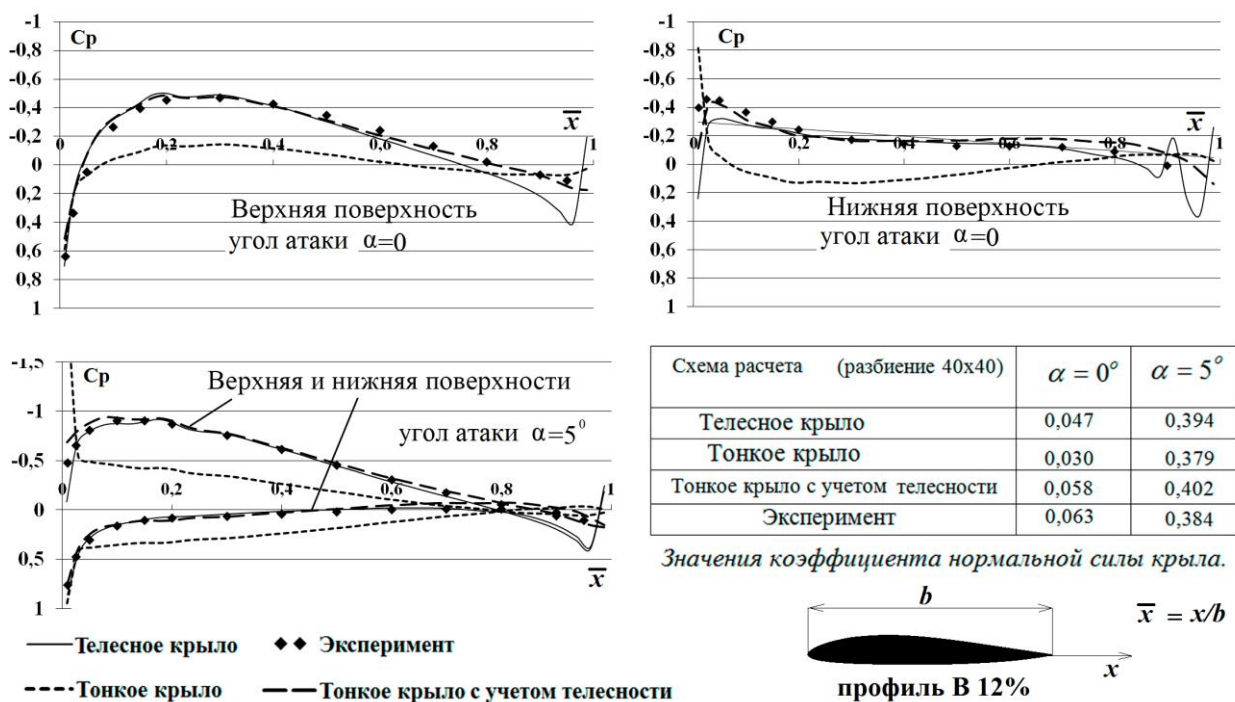


Рис. 7. Результаты расчета обтекания прямоугольного крыла.

Полученные результаты позволили сделать следующие выводы:

1) Замена крыла срединной поверхностью (без учета телесности) позволяет правильно рассчитать суммарные нагрузки, но не позволяет получить правильное распределение давления по поверхности крыла. 2) Распределения давления, полученные на основании предложенной численной схемы со снесением граничного условия на срединную поверхность, хорошо согласуются с распределениями давления, полученными по исходной модели телесного крыла, а также с экспериментальными данными.

В заключении сформулированы выводы по всей работе, даны рекомендации по использованию результатов диссертации и указаны возможные направления дальнейших исследований. Отмечено, что на основании проведенного тестирования разработанной вычислительной модели можно говорить о ее применимости к решению задач аэродинамики крыльев и несущих поверх-

ностей летательных аппаратов сложной формы в плане, воздушных винтов. Особо актуальным представляется применение предложенного подхода к моделированию процесса формообразования двухоболочковых планирующих парашютов и парапланов, где необходимо иметь трехмерный метод расчета распределения давления по поверхности купола, не вырождающийся при сближении и слипании его верхней и нижней поверхностей.

Публикации по теме диссертации

А) Публикации в журналах, входящих в перечень ВАК:

1. Писарев И.В., Сетуха А.В. О моделировании трехмерного обтекания тел несжимаемой жидкостью вблизи неплоского экрана. // Ученые записки Орловского Государственного Университета, 2011, №5, с. 185-190.
2. Писарев И.В., Сетуха А.В. Снесение граничных условий на плоскость в краевой задаче Неймана для уравнения Лапласа на слабоизогнутом экране // Ученые записки Орловского Государственного университета, 2012, №6, с.72-77.
3. Писарев И.В., Сетуха А.В. Снесение граничного условия на срединную поверхность при численном решении краевой задачи линейной теории крыла // Вычислительные методы и программирование, 2014, №15, с.109-120.

Б) Статьи в трудах конференций и тезисы докладов:

4. Маслов Д.Н., Писарев И.В., Сетуха А.В. О моделировании обтекания тел несжимаемой жидкостью вблизи неплоского экрана // Труды XV Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2011), Харьков-Херсон, 2011, с. 260-263
5. Писарев И.В. Снесение граничных условий на плоскость в краевой задаче Неймана для уравнения Лапласа на слабоизогнутом экране // Труды XVI Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2013), Харьков-Херсон, 2013, с. 319-322